CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by EPrints Complutense

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CC. FÍSICAS
Departamento de Física Teórica

SISTEMAS DINÁMICOS DE ORDEN DIFERENCIAL ELEVADO

MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR POR Eduardo Jesús Sánchez Villaseñor

Bajo la dirección del Doctor:
Jaime Julve

Madrid, 2004

• **ISBN: 978-84-669-1766-7** **©Eduardo Jesús Sánchez Villaseñor, 2001**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Físicas

Departamento de Física Teórica

Sistemas dinámicos de orden diferencial elevado

Memoria presentada por

EDUARDO JESÚS SÁNCHEZ VILLASEÑOR

para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas

Madrid, mayo de 2001

A mis padres.

Índice

Agradecimientos

Quiero aprovechar estas líneas para mostrar mi agradecimiento a todas aquellas personas que, de alguna forma, me han ayudado a lo largo de la elaboración de esta tesis doctoral. En primer lugar estoy en deuda con Jaime Julve, mi director de tesis, por su apoyo constante, sus acertados comentarios –tanto científicos como personales–, su intensa colaboración y por su gran sentido del humor. En segundo lugar, pero no menos importante, quiero agradecer a J. Fernando Barbero G. su continua y desinteresada ayuda sin la cual esta tesis no hubiese sido posible. La suerte y el orgullo de haber trabajado con él durante estos años solo se ven superadas por saber que cuento con su amistad.

Buena parte de este trabajo fue realizado en el Instituto de Matemáticas y Física Fundamental (IMAFF) perteneciente al Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Deseo dar las gracias a Alfredo Tiemblo, director del IMAFF, por todos los medios que puso a mí disposición y por tener siempre su puerta abierta. Debo agradecer también a Juan León su empujón dentro del maravilloso mundo de la informática, todos sus comentarios, referencias y su continua preocupación. A Fernando Jordán de Urríes todas las discusiones científicas. Gracias por tener siempre la paciencia y la capacidad de enseñar. Por último a Antonio Pulido por la infinidad de charlas, cafés, buenos (y a veces malos) ratos que nos tocó vivir juntos.

En el plano personal, el apoyo y empuje de mi familia en todas mis decisiones ha sido, y es, indispensable para poder llegar a buen puerto. Siempre estaré en deuda con mis padres por haberme ayudado en todo lo que ha estado en sus manos, y más allá.

Madrid, mayo de 2001.

Introducción

Los sistemas físicos de interés común en mecánica clásica y teoría de campos, incluyendo los sistemas cuánticos relativistas, se caracterizan por tener ecuaciones de movimiento de segundo orden en la derivada temporal[1]. Generalmente estas ecuaciones se deducen mediante métodos variacionales a partir de una acción que es de segundo orden diferencial, o bien cuadrática en las velocidades generalizadas si se ignoran derivadas totales en la Lagrangiana.

Las teorías Lagrangianas dependientes de las derivadas de orden superior en las variables de configuración (en adelante teorías *alto-derivativas*[2]) tienen una vieja tradición en Física. Sus aplicaciones incluyen la electrodinámica generalizada de F. Bopp [1] y B. Podolsky [2], considerada también en [3] y [4] como un banco de pruebas muy útil para estudiar las teorías gravitatorias, las regularizaciones del modelo de Higgs [5], las teorías no locales [6], la dinámica de las partículas relativistas moviéndose bajo la acción de un campo [7], la gravitación efectiva [8] y los taquiones [9]. El interés por los

[1] y también espaciales si se consideran teorías de campo relativistas. Son una excepción los sistemas fermiónicos espinoriales que no serán tratados en esta memoria.

[2] Usaremos el término *alto-derivativo* para referirnos a teorías Lagrangianas en la que la función Lagrangiana depende de derivadas de las variables superiores a la primera. Por el contrario, el término *bajo-derivativo* se referirá a teorías en las que la dependencia es únicamente hasta la primera derivada, como ocurre en los modelos usuales.

sistemas dinámicos de alto orden diferencial sigue aún vivo en nuestros días [10], [11], aunque se concentra principalmente en el ámbito de las teorías de gravitación.

Las teorías gravitatorias con potencias de las curvaturas aparecen, por ejemplo, en el contexto de las teorías efectivas a baja energía que vienen de la teoría de cuerdas [12] y en el estudio de campos cuánticos dinámicos en un espacio-tiempo curvo no dinámico [13]. Las teorías de segundo orden en curvaturas (teorías 4-derivativas en adelante) han sido estudiadas en más detalle que el resto debido a que son renormalizables [14] en cuatro dimensiones. Esta propiedad estimuló el estudio del grupo de renormalización en teorías de gravitación [15]-[19], incluyendo los intentos de eliminación de los estados de norma negativa (estados no físicos conocidos como *fantasmas de Weyl* o *poltergeists*) tan comunes en las teorías alto-derivativas. Los poltergeists son estados no físicos, debido a su norma negativa porque destruyen la unitariedad, como puede verse en [14], [15] y las referencias allí contenidas.

A nivel práctico, la gravitación alto-derivativa tiene efectos considerables sobre los potenciales efectivos y las transiciones de fase de los campos escalares en espacio-tiempos curvos, dando lugar a una gran riqueza de consecuencias astrofísicas y cosmológicas [20]. Estas aplicaciones fenomenológicas han contribuido a mantener vivo el interés teórico, tal como viene recogido en [21] (una de las obras introductorias más completas sobre el tema), pese al citado problema de la unitariedad en su tratamiento perturbativo.

Inicialmente, fuera de las propiedades relacionadas con la renormalizabilidad [14] poco se conocía más allá del contenido de partículas, leido a partir de la descomposición lineal del propagador alto-derivativo en términos con polos de segundo orden (partículas), junto con algunos aspectos relacionados con las ecuaciones de movimiento [22]. Los progresos teóricos definitivos surgieron con el desarrollo de un procedimiento, basado en la transformada de Legendre, ideado para convertir la teoría 4-derivativa en una teoría equivalente de segundo orden [23]. Posteriormente [24] se encontró una diagonalización de la teoría resultante en términos de campos que ponen de manifiesto explícitamente los grados de libertad involucrados (en particular el fantasma de Weyl masivo), completando de este modo el proceso de reducción de orden diferencial. Debe hacerse notar que las teorías con potencias cúbicas o superiores en las curvaturas propagan el mismo número de grados de libertad que las teorías cuadráticas debido a que dichas potencias no contribuyen a la teoría linealizada.

En el caso de la gravitación existe un método alternativo de reducción de orden diferencial, propuesto en [25], que se apoya en la introducción de un campo auxiliar acoplado al tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ (o a la curvatura escalar R) con un término cuadrático. Sin embargo, puede demostrarse que dicho método es equivalente a la realización de una transformada de Legendre respecto de $G_{\mu\nu}$ (o bien R), en la que el campo auxiliar se corresponde con el momento asociado a la transformación.

Para modelos de campos escalares los procedimientos de reducción de orden diferencial se han aplicado también a ejemplos académicos con el propósito de entender mejor su funcionamiento. En [26] puede encontrarse un ejemplo simplificado del procedimiento de reducción de orden en el caso de un campo escalar que propaga tanto grados de libertad masivos como de masa nula. Previamente, en un apéndice, N. H. Barth y S. M. Christensen [17] proporcionaron la descomposición de los propagadores escalares alto-derivativos en trozos cuadráticos para las teorías escalares de cuarto, sexto y octavo orden diferencial. Los resultados obtenidos en [26] dan significado a estas descomposiciones. Además, se ha utilizado también una teoría alto-derivativa escalar de sexto orden diferencial como una regula-rización del modelo de Higgs para producir una teoría finita [5].

Los tratados clásicos [27] estudiaron las teorías Lagrangianas y Hamiltonianas de sistemas con un número finito de grados de libertad y derivadas temporales superiores de la coordenada generalizada. Posteriormente el trabajo se ha concentrado en los problemas variacionales con la ayuda de la forma de Cartan, los k-jets, la geometría simpléctica y las aplicaciones de Legendre [28], [29], [30], [31]. Sin embargo, el caso particular de las teorías de campo covariantes relativistas tiene sus propias complicaciones que no han quedado cubiertas por dichos tratamientos generales.

El propósito de esta tesis es dar respuesta a los siguientes puntos:

1. En el caso de teorías de campos libres relativistas existen propuestas de reducción de orden diferencial basadas en el uso de la transformada de Legendre covariante y una posterior diagonalización en la variables [32], [33]. Dichas propuestas se apoyan en técnicas que no han permitido su generalización directa ni a orden diferencial arbitrario ni a los casos en los que hay presentes simetrías de gauge. ¿Es posible entonces un tratamiento general de estas situaciones?
2. ¿En qué medida los métodos de reducción de orden diferencial covariantes basados en el uso de multiplicadores de Lagrange [34], [35] son más o menos efectivos que aquellos basados en la transformada de Legendre? ¿Cómo pueden extenderse a situaciones que presentan simetrías locales?
3. ¿Cómo se aplican las técnicas simplécticas covariantes [36], [37], [38] en el caso de las teorías alto-derivativas y cuáles son las ventajas de su utilización?
4. ¿Cómo interaccionan las técnicas BRST con los métodos de reducción de orden diferencial? En particular, en el contexto de la gravitación alto-derivativa [39]

¿cuál es el contenido de partículas (físicas o no) de la teoría fijada de gauge y cuál el su papel en el mecanismo BRST?

Los dos primeros capítulos de esta tesis dan la solución a las dos primeras cuestiones. Además ilustran las enormes ventajas que se derivan de la utilización de las técnicas simplécticas covariantes en la resolución de problemas muy generales en teorías de campos, ya sean alto-derivativas o no [40]. En estos capítulos resaltaremos los aspectos relacionados con la covariancia Lorentz y con la interpretación en términos de partículas de las teorías, haciendo énfasis en la estructura de los propagadores y el acoplo con otros campos de materia.

En particular, en el primer capítulo abordaremos el problema utilizando técnicas basadas en la transformada de Legendre covariante [23] mientras que en el segundo capítulo haremos uso de multiplicadores de Lagrange, a nivel covariante, para reducir el orden diferencial. La utilización de multiplicadores de Lagrange como método de reducción de orden diferencial en formulaciones no covariantes es bien conocida. Por ejemplo, M. Kaku hace uso de este tipo de técnicas en [41] para reducir el orden diferencial de la Lagrangiana gravitatoria puramente 4-derivativa con invariancia conforme escrita en forma no covariante 3+1. Existen también ejemplos de utilización a nivel covariante [25] en casos particulares. Los métodos que propondremos [35] se aplican, por el contrario, con toda generalidad en el caso de teorías cuadráticas respetando, además, la covariancia.

En estos dos primeros capítulos nos concentraremos en el estudio de las teorías escalares [17], [26] y de formas diferenciales, que permiten incorporar la presencia de simetrías de gauge a la discusión. Debido a que los tratamientos perturbativos habituales de las teorías de gauge requieren de una fijación del gauge junto a los términos de compensación de Faddeev-Popov estudiaremos también los aspectos que emergen al conjugar los procedimientos de reducción de orden diferencial y las técnicas BRST. El análisis que presentaremos se centrará principalmente en la parte libre de las Lagrangianas (aunque consideraremos sucintamente el comportamiento de las versiones no abelianas de los modelos de gauge frente a las técnicas de reducción de orden). Las autointeracciones y las interacciones con otros campos vendrán recogidas en un término de fuente.

Los resultados desarrollados en estos dos capítulos solucionan las deficiencias existentes en los intentos previos [33], que adolecen de limitaciones en cuanto a su aplicacibilidad a problemas de orden diferencial arbitrario. Las herramientas que demuestran ser de gran utilidad para llevar a cabo este tipo de tareas son las técnicas simplécticas covariantes desarrolladas por E. Witten y Č. Crnković [36], G. J. Zuckerman [37] y posteriormente extendidas al caso de teorías alto-derivativas (e incluso no locales) por V. Aldaya, M. Navarro y J. Navarro-Salas [38].

Reservaremos el tercer capítulo para el tratamiento específico de las teorías gravitatorias que revisten especial interés debido a su relevancia física y a su inherente complejidad. Concretamente nos centraremos en el estudio de las teorías cuadráticas en curvaturas. Como siempre, el énfasis se centrará en la identificación de los grados de libertad que se propagan. En primer lugar realizaremos un estudio exhaustivo del espacio de fases covariante (a nivel lineal) para luego comparar con las técnicas estándar en Teoría Cuántica de Campos que hacen uso del formalismo de proyectores de espín [42]. Por último revisaremos el funcionamiento de las técnicas de reducción de orden diferencial en el caso de la teoría completa no polinómica.

En el capítulo cuarto trataremos las teorías cuadráticas en curvaturas con términos de fijación de gauge [39]. En este capítulo pondremos de manifiesto la fecundidad del cruce entre los métodos de reducción de orden diferencial basados en la transformada de Legendre y el mecanismo de compensación BRST, ahora ya en el marco de la gravitación. Además realizaremos una identificación completa de las partículas físicas y no físicas[3]. Los resultados obtenidos clarifican el papel de los "terceros fantasmas", característicos de las teorías alto-derivativas.

La tesis termina con las conclusiones y la discusión de los resultados descritos a lo largo de la memoria y varios apéndices.

En el apéndice A se recogen las definiciones y las propiedades referentes a los proyectores de espín junto con una parametrización de los distintos subespacios de espín. Además se incluyen algunos comentarios referentes a cálculos auxiliares del capítulo cuarto así como una base de los operadores diferenciales locales de orden cero, dos y cuatro sobre el espacio de tensores simétricos de orden dos.

En el apéndice B se discuten los posibles términos de masa para el campo $h_{\mu\nu}$ haciendo uso de las técnicas simplécticas covariantes.

El apéndice C incluye otros cálculos secundarios del capítulo cuarto. En particular se determinan las condiciones sobre los parámetros de gauge que garantizan la localidad de la teoría bajo-derivativa equivalente y el método de reducción de orden diferencial para los campos anticonmutantes de Faddeev-Popov.

Con objeto de hacer una presentación autocontenida de esta memoria, recogemos a

[3]ya sea por su dependencia en los parámetros de gauge (fantasmas de gauge) o por su norma negativa (fantasmas de Weyl).

continuación los convenios y notaciones geométrico-diferenciales utilizados.

Notación y convenios

• La métrica de Minkowski que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo será aquella que en coordenadas inerciales tenga la forma

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-, +, \ldots, +)\,,$$

donde el signo negativo está asociado con la componente temporal. Por $\eta^{\mu\nu}$ denotaremos a la inversa de $\eta_{\mu\nu}$.

• Como buena parte de los resultados que presentaremos están escritos en términos de formas diferenciales es conveniente tener un diccionario que permita pasar de la notación sin índices a la notación tensorial.

Escribiremos las s-formas ω definidas sobre una variedad diferenciable M de dimensión m (dotada de coordendas x^a) como

$$\omega(x) = \omega_{a_1\cdots a_s}(x) dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_s}$$

donde

$$\omega_{a_1\cdots a_s} = \omega_{[a_1\cdots a_s]} := \frac{1}{s!} \sum_{\pi\in\mathcal{S}_s} (-1)^\pi \omega_{\pi(a_1)\cdots\pi(a_s)}$$

siendo $\pi \in \mathcal{S}_s$ una permutación de orden s.

El producto exterior de una s-forma ω y una r-forma ξ viene definido a través de

$$\omega \wedge \xi = \omega_{[a_1 \cdots a_s} \xi_{b_1 \cdots b_r]} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_s} \wedge dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_r} \quad ,$$

y satisface

$$\begin{aligned} \omega \wedge \xi &= (-1)^{sr} \xi \wedge \omega \quad , \\ (\xi \wedge \eta) \wedge \omega &= \xi \wedge (\eta \wedge \omega) \quad . \end{aligned}$$

Definiremos la derivada exterior como aquel operador diferencial que convierte s-formas ω en $(s+1)$-formas según

$$d\omega = \partial_{[a_1} \omega_{a_2 \cdots a_{s+1}]} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{s+1}} \quad ,$$

y satisface

$$\begin{aligned} d^2 &= 0 \\ d(\omega \wedge \xi) &= d\omega \wedge \xi + (-1)^s \omega \wedge d\xi \quad . \end{aligned}$$

En presencia de una estructura métrica en M es posible definir el dual de Hodge de una s-forma ω como la $(m-s)$-forma que viene dada por

$$*\omega = \frac{1}{(m-s)!} \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \omega_{b_1 \cdots b_s} \tilde{\eta}^{b_1 \cdots b_s c_1 \cdots c_{m-s}} g_{a_1 c_1} \cdots g_{a_{m-s} c_{m-s}} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_{m-s}} \, ,$$

donde $\tilde{\eta}^{b_1 \cdots b_m}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita en M que vale, en cualquier sistema de coordenadas, $+1$ para las permutaciones pares de los índices y -1 para las permutaciones impares. Si g_{ab} tiene signatura Riemaniana se cumple

$$* * \omega = (-1)^{s(m-s)} \omega$$

mientras que para signatura Lorentziana se tiene

$$* * \omega = (-1)^{s(m-s)+1} \omega \quad .$$

Es posible definir también el adjunto de la derivada exterior δ mediante

$$\begin{aligned} \delta &= (-1)^{m(s+1)+1} * d * \quad \text{signatura Riemanniana} \\ \delta &= (-1)^{m(s+1)} * d * \quad \text{signatura Lorentziana} \quad . \end{aligned}$$

Ésta convierte s-formas en $(s-1)$-formas de acuerdo con

$$\delta\omega = -s\nabla^a \omega_{aa_1\cdots a_{s-1}} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge d^{a_{s-1}} \quad ,$$

donde ∇ es la derivada covariante compatible con la métrica g_{ab}. El operador δ satisface

$$\delta^2 = 0 \quad .$$

Finalmente definiremos el D'Alembertiano como el operador

$$\Box = -d\delta - \delta d \quad ,$$

que transforma s-formas en s-formas según

$$\Box\omega = \nabla_a \nabla^a \omega_{a_1\cdots a_s} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge x^{a_s};$$

y conmuta tanto con d como con δ.

• Supondremos en todos los casos que los espacios $\mathcal{S}$ de soluciones de las ecuaciones de campo de los principios variacionales que consideraremos (*espacios de fases covariantes* [36], [45]) tienen estructura de variedad diferenciable (genéricamente de dimensión infinita). De esta forma tenemos garantizada la existencia de una derivada y un producto exterior, $\mathbb{d}$ y $\mathbb{\wedge}$ respectivamente, definidos sobre el espacio cotangente de $\mathcal{S}$.

Capítulo 1

Métodos de reducción de orden diferencial basados en la transformada de Legendre

Tras una breve introducción sobre el método de Ostrogradski [43], creado en 1850 para extender el formalismo Hamiltoniano a las teorías de orden diferencial mayor que dos, estudiaremos generalizaciones diseñadas para poner de manifiesto los grados de libertad físicos. Este tipo de técnicas nos permitirán poner en correspondencia teorías Lagrangianas alto-derivativas con sumas de teorías Lagrangianas bajo-derivativas estándar. El procedimiento requiere como paso final ciertas redefiniciones en las variables con el fin de diagonalizar los grados de libertad. Al contrario que los intentos previos [36], [32], el formalismo que a continuación presentamos resuelve con completa generalidad el problema de reducción de orden diferencial en teorías de campos alto-derivativas lineales dotadas de un pseudo-producto escalar.

Partiendo de los sistemas mecánicos (dimensionalidad finita), a lo largo del capítulo consideraremos teorías de campos (covariantes relativistas) escalares, vectoriales y sus generalizaciones antisimétricas tanto abelianas como no abelianas.

En el caso de teorías de campos con simetrías locales o de gauge, el procedimiento tradicional de cuantización perturbativa requiere una fijación del "gauge" y la "compensación"[1] de la misma mediante términos de Faddeev-Popov. Por ello consideraremos sucintamente cómo el formalismo BRST se conjuga con nuestras técnicas de reducción de orden diferencial.

1.1 El formalismo de Ostrogradski

Consideremos una teoría Lagrangiana alto-derivativa descrita a través de variables de configuración $q(t)$ mediante

$$L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots, \overset{(m)}{q}\,)\,,$$

donde m es el orden de la derivada mas alta que aparece en L. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a la Lagrangiana anterior,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \cdots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}} = 0\,, \tag{1.1}$$

es una ecuación diferencial ordinaria de, a lo sumo, orden $2m$. El formalismo de Ostrogradski [43] permite construir una versión Hamiltoniana para la teoría en un espacio de fases cuyas coordenadas son los m momentos generalizados

$$p_m \;:=\; \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}}\,, \tag{1.2}$$

$$p_i \;:=\; \frac{\partial L}{\partial \overset{(i)}{q}} - \dot{p}_{i+1} \quad ; \quad 1 \le i < m\,, \tag{1.3}$$

[1]Es común referirse al sector de Faddeev-Popov como *términos de compensación*. Su misión es garantizar que los resultados físicos obtenidos mediante integración funcional no dependan de la fijación del gauge que se utilice.

junto con las m variables independientes

$$
\begin{aligned}
q_1 &:= q \\
q_i &:= \overset{(i-1)}{q} \quad ; \quad 1 < i \leq m \,.
\end{aligned}
$$

De esta forma, la Lagrangiana $L(q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_m)$ se puede considerar función de las coordenadas q_i y de las derivadas $\dot{q}_m := \overset{(m)}{q}$. Para definir el Hamiltoniano en el espacio de fases (q_i, p_i) es necesario –bajo ciertas hipótesis de regularidad [23]– expresar $\dot{q}_m$ de la ecuación (1.2) en función de $q_1, \ldots, q_m$ y p_m:

$$
\dot{q}_m = v_m(q_1, \ldots, q_m; p_m) \,.
$$

De esta forma se define el Hamiltoniano de Ostrogradski como

$$
H(q_i, p_i) := p_m v_m + p_{m-1} q_m + \cdots + p_1 q_2 - L(q_1, \ldots, q_m; v_m) \,.
$$

Las variables (q_i, p_i) son canónicas respecto de la forma simpléctica[2] definida en $\mathcal{S}$

$$
\Omega(t) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{d} q_i(t) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d} p_i(t) \,.
$$

Es fácil comprobar que Ω es independiente del tiempo haciendo uso de las ecuaciones de movimiento, que en su versión Hamiltoniana son

$$
\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \,. \tag{1.4}
$$

Estas ecuaciones de primer orden son, desde luego, equivalentes a las ecuaciones de Euler alto-derivativas (1.1).

[2]Una forma simpléctica es una 2-forma cerrada y no degenerada [53]. La existencia de una estructura con estas características es esencial para la identificación de los grados de libertad. Volveremos sobre ello en el capítulo 3.

Como es bien conocido en la mecánica usual, una vez se ha reducido el orden diferencial por medio del formalismo Hamiltoniano, es posible obtener las ecuaciones canónicas mediante un principio variacional. Así, las ecuaciones (1.4) se pueden ver como ecuaciones de Euler-Lagrange para la llamada Lagrangiana de Helmholtz

$$L_H(q_i, \dot{q}_i; p_i) := \sum_{i=1}^{m} p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i)\,,$$

la cual depende de las $2m$ coordenadas q_i y p_i, y únicamente de las velocidades $\dot{q}_i$. Es importante destacar que el principio de acción generado por L_H, que se conoce como principio de Hamilton modificado [44], da lugar a ecuaciones bajo-derivativas (de primer orden diferencial en este caso).

Cuando abandonamos los sistemas mecánicos finitodimensionales –en los que el espacio de fases es de dimensión finita– para considerar teorías de campo con coordenadas $\phi(\vec{x}, t)$ –donde ϕ puede tener índices internos y/o espaciotemporales–, los principios de acción locales vienen definidos por densidades Lagrangianas del tipo

$$\mathcal{L}(\phi, \phi_\mu, \ldots, \phi_{\mu_1 \cdots \mu_m})\,,$$

donde $\phi_{\mu_1 \cdots \mu_r} := \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_r} \phi$. La ecuación de campo en este caso,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} + \cdots + (-1)^m \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu_1 \cdots \mu_m}} = 0\,,$$

es una ecuación diferencial en derivadas parciales de a los sumo orden $2m$. La extensión del método de Ostrogradski a estas situaciones es directa. Basta construir una transformación de Legendre mediante la definición de los momentos $p(x)$ en la forma

$$\begin{aligned} p^{\mu_1 \cdots \mu_m} &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu_1 \cdots \mu_m}}\,, \\ p^{\mu_1 \cdots \mu_i} &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu_1 \cdots \mu_i}} - \partial_{\mu_{i+1}} p^{\mu_1 \cdots \mu_i \mu_{i+1}} \quad ; \quad 1 \leq i < m\,. \end{aligned}$$

Cuando la teoría es regular –el caso de las teorías de gauge será tratado más adelante– la ecuación para $p^{\mu_1\cdots\mu_m}$ puede ser invertida para dar

$$\phi_{\mu_1\cdots\mu_m} = V_{\mu_1\cdots\mu_m}(\phi, \phi_\mu, \cdots, \phi_{\mu_1\cdots\mu_{m-1}}; p^{\mu_1\cdots\mu_m}) \, .$$

Las variables (ϕ, p) son canónicas respecto de la forma simpléctica

$$\Omega = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \sum_{i=1}^{m} d\!\!I\phi_{\mu_1\cdots\mu_i}(\vec{x}, t) \wedge\!\!\!\wedge d\!\!I p^{\mu_1\cdots\mu_i}(\vec{x}, t) \, ,$$

cuya independencia del tiempo vuelve a ser consecuencia del uso de las ecuaciones de campo.

Del mismo modo, las ecuaciones de campo pueden ser deducidas o bien a partir de la densidad "Hamiltoniana"

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\phi, \phi_\mu, \ldots, \phi_{\mu_1\cdots\mu_{m-1}}, p^\mu, \ldots, p^{\mu_1\cdots\mu_m}) &:= p^\mu\phi_\mu + \cdots + p^{\mu_1\cdots\mu_{m-1}}\phi_{\mu_1\cdots\mu_{m-1}} + \\ &+ p^{\mu_1\cdots\mu_m}V_{\mu_1\cdots\mu_m} - \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu, \ldots, \phi_{\mu_1\cdots\mu_{m-1}}, V_{\mu_1\cdots\mu_m}) \, ,\end{aligned}$$

en la forma

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^\mu} \quad ; \quad \partial_{\mu_1}\phi_{\mu_2} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^{\mu_1\mu_2}} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \partial_{\mu_1}\phi_{\mu_2\cdots\mu_m} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}} \, . \\ \partial_\mu p^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} \quad ; \quad \partial_\mu p^{\mu_1\mu} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_{\mu_1}} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \partial_\mu p^{\mu_1\cdots\mu_{m-1}\mu} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_{\mu_1\cdots\mu_{m-1}}} \, ,\end{aligned}$$

o bien variacionalmente mediante la Lagrangiana de Helmholtz

$$\mathcal{L}_H := p^\mu\partial_\mu\phi + p^{\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_2}\phi_{\mu_1} + \ldots + p^{\mu_1\cdots\mu_m}\partial_{\mu_m}\phi_{\mu_1\cdots\mu_{m-1}} - \mathcal{H} \, .$$

1.2 Un ejemplo de la Mecánica Clásica

Empezaremos tratando un modelo alto-derivativo en mecánica clásica que nos servirá posteriormente de guía para la teoría de campos relativista. El modelo que consideraremos en esta sección viene descrito a través de la Lagrangiana alto-derivativa

$$L^{HD} := \frac{1}{2} q \left(\frac{d^2}{dt^2} + m_1^2 \right) \cdots \left(\frac{d^2}{dt^2} + m_N^2 \right) q \,, \tag{1.5}$$

donde supondremos que las masas m_a^2 $(a = 1, \ldots, N)$ son distintas[3] entre sí y han sido ordenadas de modo que $m_a^2 > m_b^2$ para $a > b$. La ecuación de movimiento

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + m_1^2 \right) \cdots \left(\frac{d^2}{dt^2} + m_N^2 \right) q = 0$$

tiene solución general de la forma

$$q(t) = \sum_{a=1}^{n} q_a(t) \quad \text{con} \quad q_a(t) := \alpha_a e^{-im_a t} + \bar{\alpha}_a e^{im_a t} \,,$$

siendo α_a las constantes arbitrarias de integración complejas, que distinguen entre las soluciones particulares de la ecuación de movimiento, y $\bar{\alpha}_a$ sus complejos conjugados. Por tanto, el espacio de soluciones es suma directa de espacios de soluciones de las ecuaciones de segundo orden $(d^2/dt^2 + m_a^2)q_a = 0$. Otra manera de llegar a esta conclusión la encontramos en la descomposición del "propagador" (función de Green) alto-derivativo en suma de propagadores de segundo orden

$$\Delta^{HD} = \frac{1}{\prod_{a=1}^{N} (d^2/dt^2 + m_a^2)} = \sum_{a=1}^{N} \frac{\Delta_a}{\prod_{b \neq a}^{N} (m_b^2 - m_a^2)} \quad \text{con} \quad \Delta_a := \frac{1}{d^2/dt^2 + m_a^2} \,. \tag{1.6}$$

Debido a que

$$\text{signo}\Big(\prod_{b \neq a}^{N} (m_b^2 - m_a^2)\Big) = (-1)^{a+1} \,,$$

la descomposición anterior nos hace suponer que, de manera alternada, los grados de libertad contenidos en las variables q_a son o bien físicos o bien de Weyl en cuanto a su contribución a la energía. Esto quedará de manifiesto mas adelante al calcular el Hamiltoniano de Ostrogradski.

[3]Los problemas asociados a la multiplicidad en las masas y/o existencia de "masas complejas" serán comentados en el siguiente capítulo.

1.2.1 El formalismo de Ostrogradski

Módulo derivadas totales, podemos escribir L^{HD} en la forma

$$L^{HD} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}(-1)^i c_{N-i} \overset{(i)2}{q}\,, \tag{1.7}$$

donde, por comodidad, hemos introducido las constantes c_i, definidas a partir de las m_i en la forma

$$\begin{aligned} c_i &:= \sum_{a_1<\cdots<a_i} m_{a_1}^2 \cdots m_{a_i}^2 \quad ; \quad i = 1, \ldots, N\,. \\ c_0 &:= 1\,. \end{aligned}$$

Nótese que c_i es producto de i masas al cuadrado. Esta escritura es especialmente apropiada como punto de partida para el formalismo de Ostrogradski presentado en la sección anterior. Las variables y momentos canónicos asociados a (1.7) son

$$\begin{aligned} q_i &:= \overset{(i-1)}{q}\,. \\ p_i &:= (-1)^i \sum_{j=0}^{N-i} c_{N-i-j} \overset{(2j+i)}{q}\,. \quad 1 \le i \le N\,. \end{aligned}$$

En términos de estas variables, la forma simpléctica de Ostrograski es canónica

$$\Omega = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{d} q_i \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d} p_i\,.$$

Introduciendo la definición de q_i y p_i en Ω podemos escribir

$$\Omega(t) = \sum_{i=1}^{N}(-1)^i \mathbb{d} \overset{(i-1)}{q}(t) \wedge\!\!\!\wedge \sum_{j=0}^{N-i} c_{N-i-j} \mathbb{d} \overset{(2j+i)}{q}(t)\,. \tag{1.8}$$

La independencia de Ω del tiempo, al restringirla sobre el espacio $\mathcal{S}$ de soluciones de las ecuaciones de movimiento, puede deducirse de la siguiente forma. En primer lugar la derivada de Ω es

$$\dot{\Omega} = -\mathbb{d} q \wedge\!\!\!\wedge \sum_{j=0}^{N-1} c_{N-j-1} \mathbb{d} \overset{(2j+2)}{q}\,.$$

Ahora, usando el hecho de que sobre soluciones de las ecuaciones de movimiento

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_{N-j-1} \mathbb{d} \overset{(2j+2)}{q} = -c_N \mathbb{d} q\,,$$

podemos poner

$$\dot{\Omega}_{\mathcal{S}} = c_N \mathbb{d} q \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d} q \equiv 0\,.$$

Explícitamente, si

$$q(t) = \sum_{a=1}^{n} \left[\alpha_a e^{-im_a t} + \bar{\alpha}_a e^{im_a t}\right] =: \sum_{a=1}^{N} \left[q_a^-(t) + q_a^+(t)\right]\,,$$

se tiene

$$\overset{(2s)}{q} = (-1)^s \sum_{a=1}^{n} m_a^{2s}(q_a^- + q_a^+) \quad ; \quad \overset{(2s-1)}{q} = (-1)^s \sum_{a=1}^{n} i m_a^{2s-1}(q_a^- - q_a^+)\,,$$

por lo que la restricción $\Omega_{\mathcal{S}}$ de Ω sobre $\mathcal{S}$ se obtiene haciendo uso de las dos fórmulas anteriores e invirtiendo el orden de sumación en (1.8) para poder utilizar la identidad[4]

$$\prod_{b\neq a}^{N}(m_b^2 - m_a^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{N-k-1}(N-k) c_k m_a^{2(N-k-1)}\,.$$

Siguiendo estos pasos se llega finalmente a la expresión

$$\Omega_{\mathcal{S}} = \sum_{a=1}^{N} \prod_{b\neq a}^{N} (m_b^2 - m_a^2)\, \Omega_a \quad \text{con} \quad \Omega_a := 2 i m_a \mathbb{d}\bar{\alpha}_a \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\alpha_a\,, \tag{1.9}$$

en la que la independencia temporal es evidente.

Tal como se comenta en [36], una vez conocemos la forma simpléctica sobre el espacio de fases covariante es posible generar, bajo ciertas condiciones, las cantidades conservadas de la teoría, escritas en función de los modos físicos, haciendo uso de $\Omega_{\mathcal{S}}$.

[4]Definiendo el polinomio $P(z) := \prod_{a=1}^{N}(z + m_a^2) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^{N-k}$, es inmediata la siguiente secuencia de igualdades: $P'(-m_a^2) = \prod_{b\neq a}^{N}(m_b^2 - m_a^2) = \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^{N-k-1} c_k m_a^{2(N-k-1)}$.

En particular, el Hamiltoniano se obtiene identificando H en la ecuación $i_{V_T}\Omega_{\mathcal{S}} = -\tau \mathrm{d\!l} H_{\mathcal{S}}$, donde V_T es un vector tangente en $\mathcal{S}$ a la órbita generada por la traslación en t de parámetro τ, e i_{V_T} indica la contracción de $\Omega_{\mathcal{S}}$ con V_T. En concreto $i_{V_T}\mathrm{d\!l}\alpha_a = -i\tau m_a \alpha_a$, por tanto

$$H_{\mathcal{S}} = \sum_{a=1}^{N} 2m_a^2 \prod_{b\neq a}(m_b^2 - m_a^2)\bar{\alpha}_a\alpha_a\,. \tag{1.10}$$

En $H_{\mathcal{S}}$ se dan dos tipos de contribuciones: la de los modos α_a con a impar que es físicamente aceptable ya que contribuyen a la energía de forma positiva y la de los modos α_a con a par que destruye la acotación inferior de $H_{\mathcal{S}}$ (fantasmas de Weyl) ya que su contribución es siempre negativa.

1.2.2 La transformación de Legendre generalizada y la diagonalización de los grados de libertad

Tanto la descomposición del propagador en polos simples (1.6), como la forma simpléctica y el Hamiltoniano de Ostrogradski (1.9) y (1.10) parecen indicar que cada uno de los N grados de libertad contenidos en el modelo puede ser descrito a partir de una Lagrangiana bajo-derivativa del tipo

$$\prod_{b\neq a}^{N}(m_b^2 - m_a^2)\,L_a \quad ; \quad \text{con} \quad L_a = \frac{1}{2}q_a\left(\frac{d^2}{dt^2} + m_a^2\right)q_a\,. \tag{1.11}$$

Surge entonces la pregunta ¿es posible relacionar L^{HD} con una suma de Lagrangianas de la forma (1.11)? En este apartado demostraremos que existe una correspondencia entre L^{HD} y $\sum_{a=1}^{N}\prod_{b\neq a}^{N}(m_b^2 - m_a^2)\,L_a$ que tiene lugar a través de una transformación de Legendre –que generaliza a la de Ostrogradski– seguida de una diagonalización en las variables.

El indicador más claro de que el método de Ostrogradski tal y como ha sido presentado no es el apropiado para la tarea que nos acabamos de proponer se encuentra en el número de variables. Mientras que el número de variables de Ostrogradski es $2N$ (las N variables q_i junto a las N variables p_i) el número de variables en una formulación Lagrangiana del tipo $\sum_{a=1}^{N} L_a$ es solamente N. Una manera de resolver este problema es partir de un espacio similar al de Ostrogradski pero con la mitad de variables. El camino que seguiremos pasa por expresar L^{HD} en función de q, $\ddot{q}$, $\ddot{\ddot{q}}$, ... por lo que es conveniente definir el operador diferencial de segundo orden

$$D := \frac{d^2}{dt^2} \,.$$

Notese que D es un operador simétrico bajo integración, suponiendo que las funciones se anulan con suficientemente rapidez en el infinito,

$$\int_{\mathbb{R}} dt\, q_1(t)(Dq_2)(t) = \int_{\mathbb{R}} dt\, (Dq_1)(t)q_2(t) \,.$$

Aunque al final del proceso quedará claro que el resultado es independiente de N, las manipulaciones algebraicas entre los casos N par y N impar son ligeramente diferentes. Trataremos en detalle en primer lugar el caso N par y posteriormente señalaremos las peculiaridades del caso impar.

Caso $N = 2n$.

En este caso, despreciando derivadas totales, podemos poner

$$L^{HD} = \frac{1}{2}\left[(D^n q)^2 + c_1(D^n q)(D^{n-1}q) + c_2(D^{n-1}q)^2 + \cdots + c_{2n-1}(Dq)q + c_{2n}q^2\right] .$$

La manera obvia de generalizar el formalismo de Ostrogradski consiste en definir las N variables

$$x_1 \;:=\; q \quad ; \quad x_2 := Dq \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad x_n := D^{n-1}q \,. \tag{1.12}$$

$$\pi_n \;:=\; Dx_n + \frac{c_1}{2}x_n \quad ; \quad \pi_i := \frac{\partial L^{HD}}{\partial D^i q} + D\pi_{i+1}\,,\, 1 \leq i < n\,. \tag{1.13}$$

Es importante destacar los siguientes puntos:

- El signo positivo en la definición de π_i –comparar (1.3) con (1.13)– de debe a que el operador D, al contrario de $\frac{d}{dt}$, no produce cambios de signo en la integración por partes.
- La definición de π_n puede ser invertida en la forma

$$Dx_n = \pi_n - \frac{c_1}{2}x_n\,.$$

- Al igual que en el formalismo canónico, podemos definir un Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H(x_i,\pi_i) \;:=\; & \pi_n\left(\pi_n - \frac{c_1}{2}x_n\right) + \pi_{n-1}x_n + \cdots + \pi_1 x_2 - \\ - \; & L^{HD}(x_1,\ldots,x_n,\pi_n - c_1 x_n/2) \\ = \; & \frac{1}{2}\left(\pi_n - \frac{c_1}{2}x_n\right)^2 + \pi_{n-1}x_n + \cdots + \pi_1 x_2 - \\ - \; & \frac{1}{2}\left[c_2 x_n^2 + c_3 x_n x_{n-1} + c_4 x_{n-1}^2 + \cdots + c_{2n-1}x_2 x_1 + c_{2n}x_1^2\right]\,. \end{aligned}$$

  Este Hamiltoniano lo es en el sentido de la transformación de Legendre (1.12)-(1.13) y no debe confundirse con la energía (cantidad conservada asociada a la invariancia bajo traslaciones en el tiempo).
- Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de H en la forma

$$Dx_i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} \quad ; \quad D\pi_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}\,.$$

  El habitual signo negativo en la ecuación de los "momentos" no está presente debido a que D es simétrico bajo integración.
- El principio de acción de Helmholtz viene definido a través de la Lagrangiana

$$L_H := \pi_n Dx_n + \cdots + \pi_1 Dx_1 - H(x_i,\pi_i)\,.$$

En las variables (x_i, π_i) la Lagrangiana L_H no es combinación lineal de Lagrangianas tipo L_a.

Aunque la Lagrangiana de Helmholtz, tal como la hemos deducido, no nos muestra de forma evidente el tipo de grados de libertad de la teoría, es posible diagonalizar L_H mediante el siguiente cambio de variables $\{(x_i;\pi_i)\}_{i=1}^{n} \mapsto \{q_a\}_{a=1}^{2n}$

$$\begin{aligned} x_i &= (-1)^{i-1}\sum_{a=1}^{2n} m_a^{2(i-1)} q_a \quad ; \quad 1 \le i \le n\,, \qquad (1.14)\\ \pi_i &= \sum_{a=1}^{2n}\left[\sum_{j=i}^{2n-i}\left[(-1)^j c_{j-i} m_a^{2(2n-j)}\right] + (-1)^{i-1}\frac{c_{2(n-i)+1} m_a^{2(i-1)}}{2}\right] q_a \quad ; \quad 1 \le i \le n\,. \end{aligned}$$

Es importante resaltar que la particularización de (1.14) para $N = 2, 4$ coincide con las correspondientes fómulas encontradas en [33] aunque, al contrario que allí, el método que hemos seguido nos permite resolver el problema general para N arbitrario (el caso impar está resuelto en la siguiente sección). En términos de las variables q_a la pregunta que nos hicimos al comienzo del apartado queda respondida de manera afirmativa ya que

$$L_H = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{2n}\prod_{b\neq a}^{2n}(m_b^2 - m_a^2)\left[q_a D q_a + m_a^2 q_a^2\right]\,.$$

Por último, es necesario aclarar el razonamiento que nos ha permitido averiguar el cambio de variables que diagonaliza los grados de libertad en L_H. La justificación es la siguiente: Si evaluamos la definición de x_i y π_i (1.12)-(1.13) en función de la variable de configuración inicial q se tiene

$$\begin{aligned} x_i &= D^{i-1} q\,,\\ \pi_i &= \sum_{j=i}^{2n-i} c_{j-i} D^{2n-j} q + \frac{c_{2(n-i)+1}}{2} D^{i-1} q \quad ; \quad 1 \le i \le n\,. \end{aligned}$$

Es evidente que la ecuación anterior nos permite despejar q, $Dq, \ldots, D^{2n-1}q$ en términos de x_i, π_i. Esto garantiza que la transformación de Legendre es no-singular y, en particular, que las soluciones de las ecuaciones de movimiento que se derivan de la Lagrangiana inicial L^{HD} y las que se derivan de L_H están en correspondencia biunívoca [23]. En concreto, si dotamos de coordenadas a $\mathcal{S}$ por medio de la variable inicial q tenemos que

$$q = \sum_{a=1}^{N} q_a \,,$$

donde $(D + m_a^2)q_a = 0$. En las variables (x_i, π_i), $\mathcal{S}$ viene descrita como

$$\begin{aligned} x_i &= (-1)^{i-1} \sum_{a=1}^{2n} m_a^{2(i-1)} q_a \,, \\ \pi_i &= \sum_{a=1}^{2n} \left[\sum_{j=i}^{2n-i} \left[(-1)^j c_{j-i} m_a^{2(2n-j)} \right] + (-1)^{i-1} \frac{c_{2(n-i)+1} m_a^{2(i-1)}}{2} \right] q_a \quad ; \quad 1 \leq i \leq n \,. \end{aligned}$$

Si pensamos ahora en q_a como variables genéricas (no sujetas a $(D + m_a^2)q_a = 0$), la ecuación anterior nos da justamente la transformación que diagonaliza L_H. La razón es evidente, ésta es la transformación que, sobre $\mathcal{S}$, captura los grados de libertad de la teoría. Nótese que el razonamiento que ha permitido la diagonalización funciona gracias a que la relación entre los grados de libertad q_a y las variables (x_i, π_i) es algebraica. Esto es consecuencia de que la transformación de Legendre usa variables conjugadas a $\ddot{q}$ y no a $\dot{q}$.

Caso $N = 2n - 1$.

Aun cuando en la transformación de Legendre los momentos se definan respecto del operador D, a cada variable x_i se le asocia un momento conjugado π_i. Esto hace que el número total de variables que deben ser empleadas en un proceso de reducción de orden diferencial que haga uso de la transformada de Legendre sea, en principio, par. Puesto que el número de grados de libertad coincide con N, si N es impar dicho número también lo será. De aquí que el proceso de reducción de orden diferencial para N impar está obligado a presentar diferencias frente al caso par. En particular, deben existir ligaduras que se encarguen de eliminar un número impar de variables en el espacio (x_i, π_i).

Si $N = 2n - 1$, y como siempre módulo derivadas totales, podemos escribir

$$\begin{aligned} L^{HD} &= \frac{1}{2}\Big[(D^n q)(D^{n-1}q) + c_1(D^{n-1}q)^2 + \\ &+ c_2(D^{n-1}q)(D^{n-2}q) + \cdots + c_{2n-2}(Dq)q + c_{2n-1}q^2\Big] \,. \end{aligned}$$

Analogamente al caso par, definimos

$$x_i := D^{i-1}q \quad ; \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{1.15}$$

$$\pi_n := \frac{x_n}{2} \quad ; \quad \pi_i := \frac{\partial L^{HD}}{\partial D^i q} - D\pi_{i+1} \quad ; \quad i = 2, \ldots, n\,. \tag{1.16}$$

Al contrario que entonces, en este caso la ecuación que define π_n no permite despejar Dx_n sino que genera la ligadura $\pi_n = x_n/2$. Es la ecuación para π_{n-1} la que debe ser usada para despejar Dx_n en función de x_i y π_i:

$$\pi_{n-1} = \frac{Dx_n}{2} + c_1 x_n + \frac{c_2}{2}x_{n-1}\,.$$

El resto del proceso es obvio. Nuestro punto de llegada será el principio variacional definido a través de la Lagrangiana de Helmholtz y únicamente merece la pena recordar que en un principio variacional siempre es lícito resolver en la acción las ecuaciones algebraicas. Por tanto, al final del proceso podemos eliminar la variable π_n mediante el uso de $\pi_n = x_n/2$. De esta forma

$$L_H := x_n Dx_n + \pi_{n-1}Dx_{n-1} + \cdots + \pi_1 Dx_1 - H\,,$$

donde

$$\begin{aligned} H &:= \pi_{n-1}x_n + \cdots + \pi_1 x_2 - \\ &- \frac{1}{2}\Big[c_1 x_n^2 + c_2 x_n x_{n-1} + \cdots + c_{2n-2}x_2 x_1 + c_{2n-1}x_1^2\Big]\,. \end{aligned}$$

La transformación que diagonaliza L_H, razonando exactamente igual que en el caso $N = 2n$, es ahora

$$\begin{aligned} x_i &= (-1)^{i-1} \sum_{a=1}^{N} m_a^{2(i-1)} q_a \quad ; \quad i = 1, \ldots, n\,. \\ \pi_i &= (-1)^{i+1} \sum_{a=1}^{N} \left[\sum_{j=0}^{N-2i} \left[(-1)^j c_j m_a^{2(N-i-j)} \right] + \frac{c_{N-2i+1}}{2} m_a^{2(i-1)} \right] q_a \quad ; \quad 1 \leq i < n\,. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Esta fórmula, para $N = 3$, coincide con la correspondiente de [33] aunque en este caso hemos sido capaces de encontrar la transformación general para $N = 2n - 1$.

1.3 Generalizaciones para teoría de campos

El resultado que acabamos de presentar en el marco de la mecánica no es particular de ésta sino que se apoya en principios muy generales presentes también en teoría de campos. Antes de plantear la situación general, veremos como funciona el proceso de reducción para teorías de campos escalares. Estos modelos han sido considerados en [26], [33], [32] como un primer banco de pruebas para teorías de gravitación y aparecen, a nivel lineal, en teorías de multi-inflación [46]. Las técnicas desarrolladas en [33] no son las apropiadas para extraer comportamietos generales ya que se vuelven de engorrosa aplicación a la hora de encontrar la diagonalización de grados de libertad. En esta sección pondremos remedio a dicha limitación. Posteriormente, ilustraremos su funcionamiento en el caso de teorías con simetrías de gauge de tipo $U(1)$. Las teorías gravitatorias en términos de tensores simétricos, debido a que poseen una casuística mucho más rica, deberán esperar a las siguientes secciones.

1.3.1 Escalares alto-derivativos

El ejemplo elemental en teoría de campos es siempre el campo escalar. Denotando por $\phi(\vec{x},t)$ un campo escalar genérico sobre el espacio de Minkowski la Lagrangiana tipo (1.5) que debemos considerar en el caso escalar es[5]

$$\mathcal{L}^{HD}_{(0)} := \frac{1}{2}\phi(-\Box + m_1^2)\cdots(-\Box + m_N^2)\phi\,, \tag{1.18}$$

donde $\Box := \partial_\mu \partial^\mu = -\partial_0^2 + \vec{\partial}^2$. La ecuación de campo

$$(-\Box + m_1^2)\cdots(-\Box + m_N^2)\phi(\vec{x},t) = 0\,.$$

tiene como solución general

$$\phi(\vec{x},t) = \sum_{a=1}^{N} \phi_a(\vec{x},t)$$

donde, en transformada de Fourier espacial,

$$\phi_a(\vec{x},t) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k}\left[\alpha_a(\vec{k})e^{-iw_a t} + \bar{\alpha}_a(\vec{k})e^{iw_a t}\right] \quad \text{con} \quad w_a := +\sqrt{\vec{k}^2 + m_a^2}\,.$$

El paso del modelo mecánico al modelo de campos escalares, en transformada de Fourier, es claro: basta el cambio $m_a^2 \mapsto w_a^2$ y la introducción de integrales en $\vec{k}$ allá donde hagan falta. Por ejemplo, la forma simpléctica y el Hamiltoniano de Ostrogradski asociados al principio de acción (1.18) son respectivamente

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mathcal{S}} &= \sum_{a=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k}\, 2iw_a \prod_{b\neq a}^{N}(m_b^2 - m_a^2)\, d\!\!I\bar{\alpha}_a(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge d\!\!I\alpha_a(\vec{k})\,,\\
H_{\mathcal{S}} &= \sum_{a=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k}\, 2w_a^2 \prod_{b\neq a}^{N}(m_b^2 - m_a^2)\, \bar{\alpha}_a(\vec{k})\alpha_a(\vec{k})\,.
\end{aligned}$$

[5]La Lagrangiana escalar que se considera en esta sección no es la más general. El caso general con sus peculiaridades será considerado en el segundo capítulo.

Debido a que las diferencias $w_b^2 - w_a^2 = m_b^2 - m_a^2$ son independientes de $\vec{k}$ volvemos a poder escribir $\Omega_{\mathcal{S}} = \sum_a \prod_{b\neq a}(m_b^2 - m_a^2)\,\Omega_a$ y $H_{\mathcal{S}} = \sum_a \prod_{b\neq a}(m_b^2 - m_a^2)\,H_a$, donde Ω_a y H_a son la forma simpléctica y el Hamiltoniano asociados a la Lagrangiana $\mathcal{L}_a = \frac{1}{2}\phi_a(-\Box + m_a^2)\phi_a$.

Basta definir el operador diferencial de segundo orden

$$D := -\Box = \partial_0^2 - \vec{\partial}^2$$

para que todo el proceso de reducción de orden diferencial sea idéntico al caso ya tratado en mecánica clásica. Al igual que entonces, D es simétrico bajo integración

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x\,\phi(x)(D\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x\,(D\phi)(x)\varphi(x)\,,$$

supuesto que los campos se anulan en el infinito con suficiente rapidez. Repitiendo todos los pasos de la sección 1.2, $\mathcal{L}_{(0)}^{HD}$ se puede poner en relación con

$$\mathcal{L}_{(0)} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\prod_{b\neq a}^{N}(m_b^2 - m_a^2)\phi_a(-\Box + m_a^2)\phi_a$$

mediante una transformación de Legendre, ya sea (1.12)-(1.13) ó (1.15)-(1.16) según N par o impar, seguida de la diagonalización (1.14) ó (1.17). En dichas fórmulas únicamente es necesario cambiar q por ϕ y recordar que ahora las variables x_i y π_i pasan a ser campos escalares $x_i(\vec{x},t)$, $\pi_i(\vec{x},t)$.

1.3.2 Vectores y tensores antisimétricos

Un ejemplo aparentemente más complicado que los hasta ahora tratados, en el que el procedimiento de reducción de orden diferencial presentado en la sección 1.2 se aplica de forma directa, lo encontramos en las teorías escritas en función de formas diferenciales.

La aparente complejidad de estos modelos radica en que permiten incorporar simetrías de gauge, por ejemplo del tipo $U(1)$, a nivel lineal.

Los modelos alto-derivativos para vectores fueron considerados en primer lugar por F. Bopp [1] y B. Podolsky [2] y han servido ya en nuestros días como banco de pruebas para modelos de gravitación [4], [47]. El modelo de Podolsky, tal como se presenta en [2] puede deducirse a partir de la Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{Podolsky}(A_\alpha, A_{\alpha,\beta}) := -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{a^2}{2}F_{\mu\nu,\sigma}F^{\mu\nu,\sigma}\,, \tag{1.19}$$

donde $F_{\mu\nu} := A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ y los índices han sido subidos con la métrica de Minkowski. Sus ecuaciones de campo

$$\Box(a^2\Box - 1)A_\mu + (1 - a^2\Box)A^\nu{}_{,\nu\mu} = 0\,,$$

presentan la invariancia de gauge $U(1)$ típica de la electrodinámica $\delta_\Lambda A_\mu = \partial_\mu\Lambda$. El modelo describe la propagación de un fotón (espín uno sin masa) junto a un espín uno masivo con $m^2 = 1/a^2$ y norma no física.

Tanto el modelo de Podolsky como los modelos escalares de la sección anterior pueden englobarse bajo el mismo tipo de acciones

$$S^{HD}_{(s)} = \int_{M^m} \mathcal{L}^{HD}_{(s)} \quad \text{con} \quad \mathcal{L}^{HD}_{(s)} := \frac{1}{2}A \wedge *(\delta d + m_1^2)\cdots(\delta d + m_N^2)A\,, \tag{1.20}$$

donde A es una s-forma en el espacio de Minkowski m-dimensional M^m, d, δ y $\wedge$ son, respectivamente, la derivada, la coderivada y el producto exterior y $*$ el dual de Hodge.

Definiendo el operador diferencial de segundo orden

$$D := \delta d\,,$$

trivialmente simétrico bajo integración

$$\int_{\mathbb{R}^m} A_1 \wedge *DA_2 = \int_{\mathbb{R}^m} DA_1 \wedge *A_2\,, \tag{1.21}$$

y la transformación de Legendre (para fijar ideas supondremos $N = 2n$)

$$\begin{aligned} x_i &:= (\delta d)^{i-1} A \quad ; \quad i = 1, \ldots, n\,. \\ *\pi_n &:= \frac{\partial L_{(s)}}{\partial D^n A} \quad ; \quad *\pi_i = \frac{\partial L_{(s)}}{\partial D^i A} + *D\pi_{i+1} \quad ; \quad i = 2, \ldots, n\,, \end{aligned}$$

volvemos a poder poner en relación $\mathcal{L}_{(s)}^{HD}$ con

$$\mathcal{L}_{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} \prod_{b \neq a}^{N} (m_b^2 - m_a^2)\, A_a \wedge *(\delta d + m_a^2) A_a$$

siguiendo los mismos pasos que en el caso escalar.

Es necesario hacer hincapié en que el proceso es insensible a la existencia o no de simetrías de gauge. En el caso de que $m_1 = 0$ la teoría alto-derivativa es invariante bajo la transformación $\delta_\Lambda A = d\Lambda$. En este caso la solución general de la ecuación de campo alto-derivativa es

$$A = \sum_{a=1}^{N} A_a + d\Lambda\,,$$

donde $\Lambda(x)$ es una $(s-1)$-forma arbitraria y las s-formas A_a satisfacen $(\delta d + m_a^2) A_a = 0$. Si efectuamos una transformada de Fourier espacial y representamos las componentes de $A(\vec{k}, t)$ en la forma [40]

$$A(\vec{k}, t) = \left\{ \begin{array}{c} A_{i_1 \cdots i_s}(\vec{k}, t) \\ A_{0 i_1 \cdots i_{s-1}}(\vec{k}, t) \end{array} \right\}$$

con los índices i espaciales, es posible parametrizar las soluciones A_a como

$$\begin{aligned} A_1(\vec{k}, t) &= \left\{ \begin{array}{c} \beta^{(1)}_{i_1 \cdots i_s}(\vec{k}) e^{-iwt} + \bar{\beta}^{(1)}_{i_1 \cdots i_s}(-\vec{k}) e^{iwt} \\ 0 \end{array} \right\}, \\ A_a(\vec{k}, t) &= \left\{ \begin{array}{c} -\frac{s}{w^2} i k_{[i_1} \dot{b}^{(a)}_{i_2 \cdots i_s]}(\vec{k}, t) + \beta^{(a)}_{i_1 \cdots i_s}(\vec{k}, t) \\ b^{(a)}_{i_1 \cdots i_{s-1}}(\vec{k}, t) \end{array} \right\} \quad ; \quad a \neq 1\,, \end{aligned}$$

siendo tanto $b_{i_1\cdots i_{s-1}}$ como $\beta_{i_1\cdots i_s}$ transversales y

$$\begin{aligned}
\beta^{(a)}_{i_1\cdots i_s}(\vec{k},t) &= \beta^{(a)}_{i_1\cdots i_s}(\vec{k})e^{-iw_at} + \bar{\beta}^{(a)}_{i_1\cdots i_s}(-\vec{k})e^{iw_at}\,,\\
b^{(a)}_{i_1\cdots i_{s-1}}(\vec{k},t) &= b^{(a)}_{i_1\cdots i_{s-1}}(\vec{k})e^{-iw_at} + \bar{b}^{(a)}_{i_1\cdots i_{s-1}}(-\vec{k})e^{iw_at}\,.
\end{aligned}$$

Así, la forma simpléctica sobre el espacio de fases covariante se puede poner como

$$\Omega_{\mathcal{S}} = \sum_{a=1}^{N}\prod_{b\neq a}^{N}(m_b^2 - m_a^2)\,\Omega_a$$

con

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= 2is!\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3\vec{k}}{w}\,\mathbb{d}\bar{\beta}^{(1)}_{i_1\cdots i_s}(\vec{k})\,\mathbb{\wedge}\mathbb{d}\beta^{(1)}_{i_1\cdots i_s}(\vec{k})\,,\\
\Omega_a &= 2is!\int_{\mathbb{R}^3}d^3\vec{k}\,\frac{w_a}{w^2}\,\mathbb{d}\bar{\beta}^{(a)}_{i_1\cdots i_s}(\vec{k})\,\mathbb{\wedge}\mathbb{d}\beta^{(a)}_{i_1\cdots i_s}(\vec{k}) + \\
&+ 2im_a^2ss!\int_{\mathbb{R}^3}d^3\vec{k}\,\frac{w_a}{w^4}\,\mathbb{d}\bar{b}^{(a)}_{i_1\cdots i_{s-1}}(\vec{k})\,\mathbb{\wedge}\mathbb{d}b^{(a)}_{i_1\cdots i_{s-1}}(\vec{k}) \quad , \quad a\neq 1\,,
\end{aligned}$$

donde $w = +\sqrt{\vec{k}^2}$, $w_a = +\sqrt{w^2+m_a^2}$. Como debe ocurrir, la forma simpléctica no depende de las $(s-1)$-formas arbitrarias $\Lambda(x)$, que en consecuencia describen simetrías de gauge. El resto de parámetros β y b describen modos físicos. De hecho, el número de grados de libertad del modelo (en m-dimensiones espacio-temporales) es

$$\binom{m-2}{s} + (N-1)\left[\binom{m-2}{s} + \binom{m-2}{s-1}\right] = \binom{m-2}{s} + (N-1)\binom{m-1}{s}\,.$$

Por su parte, la versión bajo-derivativa concentra toda la simetría de gauge en A_1

$$\delta_\Lambda A_1 = d\Lambda \quad ; \quad \delta_\Lambda A_a = 0 \quad , \quad a\neq 1\,,$$

quedando el resto de campos sin simetría de gauge. Por tanto, no sólo hemos reducido el orden diferencial sino que también hemos aislado la parte responsable de la simetría de gauge.

1.3.3 La situación general

Todos los modelos estudiados hasta el momento tienen en común que derivan de un principio de acción, sobre un espacio vectorial, de la forma

$$S_{HD}[\phi] = \langle \phi \,|\, (D + m_1^2) \cdots (D + m_N^2) \phi \rangle \,, \tag{1.22}$$

donde $\langle \cdot | \cdot \rangle$ es un pseudo-producto escalar y D es un operador diferencial simétrico respecto de $\langle \cdot | \cdot \rangle$, es decir

$$\langle \phi_1 \,|\, D\phi_2 \rangle = \langle D\phi_1 \,|\, \phi_2 \rangle \,.$$

Bajo estas hipótesis $S_{HD}[\phi]$ se puede poner en correspondencia con el principio de acción

$$\sum_{a=1}^{N} \prod_{b \neq a}^{N} (m_b^2 - m_a^2) S_a[\phi_a] \,, \tag{1.23}$$

donde

$$S_a[\phi_a] := \langle \phi_a \,|\, (D + m_a^2) \phi_a \rangle \,.$$

La manera de conectar la teoría alto-derivativa (1.22) con la suma de teorías bajo-derivativas (1.23) consiste en una transformación de Legendre seguida de una diagonalización lineal.

1.3.4 Modelos no abelianos

Cuando en la definición del operador D aparecen campos dinámicos[6], ya sean métricas o conexiones, es necesario variar ligeramente el método de reducción de orden diferencial.

[6]Por campos dinámicos entendemos aquellos campos respecto de los cuales hay que tomar variaciones en la acción para generar las ecuaciones de movimiento.

Para ilustrar el modo de proceder usaremos la generalización no abeliana del modelo de Podolsky en el espacio de Minkowski cuadridimensional

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} d_A^\dagger F_A^I \wedge * d_A^\dagger F_{IA} + \frac{m^2}{2} F_A^I \wedge * F_{IA} \,, \tag{1.24}$$

donde A^I es una conexión a valores en el álgebra de un grupo semisimple. Con el fin de que la acción sea un escalar en el álgebra es necesario saturar los índices I por medio de una métrica invariante que, bajo la hipótesis de semisimplicidad, puede ser la métrica de Cartan-Killing. Por ϵ^I_{JK} denotamos las constantes de estructura. F_A^I es la curvatura asociada a A y d_A la derivada covariante respecto de la conexión, ambas definidas según

$$\begin{aligned} F_A^I &:= dA^I + \frac{1}{2}\epsilon^I_{JK} A^J \wedge A^K \,. \\ d_A \Theta^I &:= d\Theta^I + \epsilon^I_{JK} A^J \wedge \Theta^K \quad ; \quad d_A^\dagger := * d_A * \;. \end{aligned}$$

Este modelo fue propuesto como modelo efectivo para explicar los fenómenos de confinamiento en QCD [50] y reconsiderado en varias ocasiones [48], [49]. Aunque haciendo uso de integración por partes, la parte cuadrática de (1.24) es del tipo (1.20), los términos de autointeracción hacen que el proceso de diagonalización, aun siendo correcto, sea bastante pesado. Una pequeña argucia resuelve el problema. Debido a la estructura en derivadas de $\mathcal{L}(d_A^\dagger F_A^I, F_A^I)$ es más acertado definir la transformada de Legendre

$$*\pi_I := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, d_A^\dagger F_A^I} = * d_A^\dagger F_{AI} \,.$$

Nótese que π es una 1-forma que se transforma como un vector respecto del índice interno. Siguiendo los pasos usuales, llegamos al principio de acción de Helmholtz

$$\mathcal{L}_H = d_A \pi_I \wedge * F_A^I + \frac{m^2}{2} F_A^I \wedge * F_{AI} - \frac{1}{2}\pi_I \wedge * \pi^I \,.$$

La pista para "diagonalizar" $\mathcal{L}_H$ la volvemos a encontrar razonado sobre el espacio de soluciones. A nivel abeliano, la ecuación (1.14) nos lleva a que

$$A^I = A_1^I + A_2^I \quad ; \quad \pi^I = -m^2 A_2^I \tag{1.25}$$

es la transformación que selecciona los grados de libertad. Es importante darse cuenta de que, aun a nivel no abeliano, A_2^I se transforma como un vector interno mientras que A_1^I lo hace como una conexión. La redefinición (1.25) permite escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H &= \frac{m^2}{2} F_1^I \wedge *F_{I1} - \frac{m^2}{2} d_1 A_2^I \wedge *d_1 A_{I2} - \frac{m^4}{2} A_2^I \wedge *A_{I2} - \\ &- \frac{m^2}{2}(F_1^I + 2d_1 A_2^I) \wedge *[A_2, A_2]_I - \frac{3m^2}{8}[A_2, A_2]^I \wedge *[A_2, A_2]_I \,. \end{aligned}$$

donde $[A_1, A_2]^I := \epsilon^I_{JK} A_1^J \wedge A_2^K$ y F_1^I, d_1 se refieren a la conexión A_1^I. Como era de esperar, la diagonalización únicamente tiene lugar a nivel lineal. La Lagrangiana completa, por el contrario, exhibe términos de interacción que respetan la simetría de gauge en A_1^I.

1.3.5 Tensores simétricos

Aunque en el caso de teorías lineales escritas en función de tensores simétricos $h_{\mu\nu}$ puede llevarse a cabo un programa similar al de las teorías de formas diferenciales, en la práctica se presentan ciertos problemas. El caso de formas diferenciales es especialmente simple ya que los únicos proyectores de espín (ver apéndice A) a nuestra disposición son

$$\theta := -\frac{\delta d}{\Box} \quad ; \quad \omega := -\frac{d\delta}{\Box} \quad \text{con} \quad \Box := -(\delta d + d\delta)\,.$$

Haciendo solamente uso del proyector θ podemos construir la mayoría de los términos cinéticos para los principios de acción locales de interés[7], al estilo de (1.21). Para teorías escritas en función de $h_{\mu\nu}$ la situación se complica por el hecho de que los términos cinéticos habituales no son "múltiplos" de proyectores, por ejemplo[8]

$$\mathcal{L}_{FierzPauli} = \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}P^{(2)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} - P^{(S)}_{\mu\nu\,\alpha\beta}\right]\Box h^{\alpha\beta}\,.$$

Este hecho dificulta considerablemente la elección general del operador D. En el capítulo siguiente depués de presentar una nueva técnica de reducción de orden diferencial, basada en el úso de multiplicadores de Lagrange, compararemos ambos formalismos en el caso particular de teorías lineales que vienen de acciones cuadráticas en curvaturas.

1.4 Fijaciones de gauge para la teoría de Podolsky

En este punto aplicaremos las técnicas BRST a la teoría de Podolsky siguiendo el método covariante de anticampos [45] para dos elecciones de fermión de fijación de gauge: uno alto-derivativo y otro bajo-derivativo, poniendo de manifiento en cada caso la relación con la cuantización canónica en el espacio de fases de Ostrogradski.

Las transformaciones BRST (con términos no mínimos) [45] para la teoría de Podolsky (1.19) son

$$sA = dC \quad ; \quad sC = 0 \quad ; \quad s\bar{C} = b \quad ; \quad sb \;=\; 0 \quad ,$$

[7] Las teorías tratadas en [40] son un ejemplo más general de esta afirmación en el sentido de que permiten la aparición del proyector ω.

[8] Consultar el apéndice A para la definición de los proyectores $P^{(2)}$ y $P^{(S)}$.

donde el número de fantasma de los campos es el habitual

$$gn(C) = -gn(\bar{C}) = 1 \quad ; \quad gn(A) = gn(b) = 0\,.$$

La Lagrangiana cuántica tiene entonces la forma

$$\mathcal{L}_{\Psi} = \mathcal{L}_{Podolsky} + s\Psi$$

donde Ψ es un fermión de fijación de gauge, que nos permite dar sentido a la integral funcional.

Veremos a continuación que la elección natural en una teoría alto-derivativa para el fermión de gauge-fixing es una elección alto-derivativa:

$$\Psi_{HD} = \bar{C} \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right) \delta A - \frac{1}{2\zeta^2} \bar{C} \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right) b\,.$$

Con esta elección

$$s\Psi_{HD} = b \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right) \delta A - d\bar{C} \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right) dC - \frac{1}{2\zeta^2} b \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right) b \quad .$$

La expresión de $s\Psi_{HD}$ puede diagonalizarse mediante la definición del campo $B = b - \zeta^2 \delta A$ en la forma

$$s\Psi_{HD} = -\frac{1}{2\zeta^2} B \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right) B + \frac{\zeta^2}{2} \delta A \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right) \delta A - d\bar{C} \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right) dC\,.$$

La ventaja de la fijación alto-derivativa radica en que, aparte de mejorar la forma de los propagadores, la cuenta de grados de libertad se vuelve inmediata ya que la Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\Psi_{HD}} = \mathcal{L}_{Podolsky} + s\Psi_{HD}$$

tiene una versión Hamiltoniana no singular: es necesario fijar 18 condiciones iniciales bosónicas $(A, \dot{A}, \ddot{A}, \dddot{A}, B, \dot{B})$ frente a 8 condiciones iniciales fermiónicas ($\bar{C}$,$\dot{\bar{C}}$,

$\ddot{\bar{C}}$, $\dddot{\bar{C}}$,C,$\dot{C}$,$\ddot{C}$, $\dddot{C}$), de manera que el número efectivo de datos iniciales es 10, que se corresponden con los 5 grados de libertad de la teoría (los dos del fotón junto a los tres del vector masivo).

Por el contrario, la fijación de gauge bajo-derivativa típica de la simetría $U(1)$

$$\Psi_{LD} = \bar{C} \wedge *\delta A - \frac{1}{2\zeta^2}\bar{C} \wedge *b\,,$$

conduce a

$$s\Psi_{LD} = b \wedge *\delta A - d\bar{C} \wedge *dC - \frac{1}{2\zeta^2} b \wedge *b\,,$$

que puede diagonalizarse de nuevo con la elección $B = b + \zeta^2 \delta A$:

$$s\Psi_{LD} = -\frac{1}{2\zeta^2} B \wedge *B + \frac{\zeta^2}{2}\delta A \wedge *\delta A - d\bar{C} \wedge *dC\,.$$

En este caso

$$\mathcal{L}_{\Psi_{LD}} = \mathcal{L}_{Podolsky} + s\Psi_{LD}$$

no permite contar el número de grados de libertad de manera directa ya que su formulación Hamiltoniana posee dos ligaduras de segunda clase[9]. Debido a esto, la diferencia entre el número de datos iniciales bosónicos ($A, \dot{A}, \ddot{A}, \dddot{A}$) y el número de datos iniciales fermiónicos ($\bar{C}$, $\dot{\bar{C}}$,C,$\dot{C}$), $16 - 4 = 12$, debe ser corregida con las dos ligaduras de segunda clase para obtener los 5 grados de libertad.

[9]Dichas ligaduras son

$$^{\sharp}\pi^{\overset{(2)}{A}_{\perp}} \approx 0 \quad ; \quad ^{\sharp}\pi^{\overset{(1)}{A}_{\perp}} - \underline{d}\,^{\sharp}\pi^{\overset{(2)}{\underline{A}}} + \zeta^2\,^{\sharp}(\overset{(2)}{A}_{\perp} - \underline{d}^{\sharp}\,\overset{(1)}{\underline{A}}) \approx 0 \quad ,$$

donde π^A es el momento asociado al campo A, $A_{\perp}$ y $\underline{A}$ son, respectivamente, las partes temporales y espaciales de los campos, los superíndices 1 y 2 se refieren a los campos de Ostrogradski $\overset{(1)}{A} = A$, $\overset{(2)}{A} = \dot{A}$ y por último $\sharp$ es el dual de Hodge espacial.

1.5 Tratamiento *à la* Julve-Bartoli para la teoría de Podolsky

Mostraremos a continuación el funcionamiento del método propuesto por J. Julve y A. Bartoli en [4] para interpretar, en términos de partículas, los procesos de compensación BRST en teorías alto-derivativas vectoriales[10]. Seguiremos un enfoque más general que el desarrallado en [4] que nos permitirá, en el capítulo cuarto, encontrar la extensión del método al caso gravitatorio.

La Lagrangiana de partida será la Lagrangiana de Podolsky con fijación de gauge alto-derivativa considerada en [4]

$$\mathcal{L}_{HD} = \mathcal{L}_{Podolsky} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Podolsky} &= -\frac{1}{2} dA \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{m^2}\right) dA \\
\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} &= -s\left[\frac{1}{\zeta^2}\bar{C} \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right)(B - \zeta^2 \delta A)\right] \\
&= \frac{\zeta^2}{2}\delta A \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right)\delta A - \frac{1}{2\zeta^2} B \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right) B + \\
&+ \bar{C} \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right)\Box C\,,
\end{aligned}$$

donde s es el operador BRST definido a través de

$$sA = dC \quad ; \quad sC = 0 \quad ; \quad s\bar{C} = B + \zeta^2 \delta A \quad ; \quad sB = \zeta^2 \Box C\,.$$

Haciendo uso de la integración por partes e introduciendo los proyectores de espín

[10] El caso de las s-formas, con $s > 1$, es más engorroso debido a la reducibilidad de las transformaciones de gauge y no presenta fenómenos esencialmente nuevos en cuanto a la reducción de orden diferencial.

$\theta = -\delta d/\Box$ y $\omega = 1 - \theta$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{HD} &= \frac{1}{2}(\Box A)\wedge * \left(-\frac{\theta}{m^2}+\frac{\zeta^2\omega}{M^2}\right)(\Box A)+\frac{1}{2}A\wedge *\left(\theta-\zeta^2\omega\right)(\Box A)- \\ &- \frac{1}{M^2}(\Box\bar{C})\wedge *(\Box C)+\frac{1}{2}(\Box C)\wedge *C+\frac{1}{2}\bar{C}\wedge *\Box C- \\ &- \frac{1}{2\zeta^2}B\wedge *\left(1-\frac{\Box}{M^2}\right)B\,.\end{aligned}$$

Nótese que al proceder de esta manera estamos considerando a la Lagrangiana como un funcional debido a que hemos hecho explícitos los proyectores θ y ω, que son objetos no locales. Es importante también darse cuenta de que el mecanismo de compensación no es trivial: el campo A propaga 8 grados de libertad (al tratarse de una teoría alto-derivativa fijada completamente de gauge), entre los campos $\bar{C}$ y C se propagan 4 gados de libertad y el campo B propaga uno. De esta manera, restando a los grados de libertad conmutantes los anticonmutantes, se recuperan los $8-4+1=5$ grados de libertad que propaga la teoría de Podolsky. Obsérvese que sin la propagación del campo B (el tercer fantasma) los campos anticonmutantes compensarían en exceso.

Definiendo los operadores no singulares (gracias a los términos de fijación de gauge)

$$\begin{aligned}\mathtt{M} &:= -\frac{1}{m^2}\theta+\frac{\zeta^2}{M^2}\omega \quad ; \quad \mathcal{M} := -\frac{1}{M^2}\,, \\ \mathtt{N} &:= \theta-\zeta^2\omega \qquad\quad ; \quad \mathcal{N} := 1\,.\end{aligned}$$

podemos definir una transformada de Legendre en la forma

$$\begin{aligned}*\pi &:= \frac{\partial\mathcal{L}_{HD}}{\partial(\Box A)} = *\left[\mathtt{M}(\Box A)+\frac{\mathtt{N}}{2}A\right]\,, \\ *\mathcal{P} &= \frac{\partial^L\mathcal{L}_{HD}}{\partial\,\Box\,\bar{C}} = *\left[\mathcal{M}\Box\, C+\frac{\mathcal{N}}{2}C\right]\,, \\ *\bar{\mathcal{P}} &= \frac{\partial^L\mathcal{L}_{HD}}{\partial\,\Box\, C} = -*\left[\mathcal{M}\Box\,\bar{C}+\frac{\mathcal{N}}{2}\bar{C}\right]\,.\end{aligned}$$

Invirtiendo las expresiones anteriores

$$\begin{aligned}
\Box A &= -\mathtt{M}^{-1}\left(\frac{\mathtt{N}}{2}A-\pi\right) =: F[A,\pi] \\
\Box C &= -\mathcal{M}^{-1}\left(\frac{\mathcal{N}}{2}C-\mathcal{P}\right) =: \mathcal{F}[C,\mathcal{P}] \\
\Box \bar{C} &= -\mathcal{M}^{-1}\left(\frac{\mathcal{N}}{2}\bar{C}+\bar{\mathcal{P}}\right) =: \bar{\mathcal{F}}[\bar{C},\bar{\mathcal{P}}]\,.
\end{aligned}$$

es directo calcular el “Hamiltoniano” y la Lagrangiana de Helmholtz asociadas con la transformación de Legendre:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &:= F[A,\pi]\wedge *\pi + \mathcal{F}[C,\mathcal{P}]\wedge *\bar{\mathcal{P}} + \bar{\mathcal{F}}[\bar{C},\bar{\mathcal{P}}]\wedge *\mathcal{P} - \mathcal{L}_{HD} \\
&= \frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\mathtt{N}}{2}A\right)\wedge *\mathtt{M}^{-1}\left(\pi-\frac{\mathtt{N}}{2}A\right) - \left(\bar{\mathcal{P}}+\frac{\mathcal{N}}{2}\bar{C}\right)\wedge *\mathcal{M}^{-1}\left(\mathcal{P}-\frac{\mathcal{N}}{2}C\right) + \\
&+ \frac{1}{2\zeta^2}B\wedge *\left(1-\frac{\Box}{M^2}\right)B\,. \\
\mathcal{L}_H &:= \Box A\wedge *\pi + \Box C\wedge *\bar{\mathcal{P}} + \Box\bar{C}\wedge *\mathcal{P} - \mathcal{H}
\end{aligned}$$

La Lagrangiana de Helmholtz se diagonaliza mediante la transformación lineal

$$\begin{array}{lllll}
A=\tilde{A}+\tilde{\pi} & ; & C=E+F & ; & \bar{C}=\bar{E}+\bar{F}\,; \\
\pi=\frac{\mathtt{N}}{2}\left(\tilde{A}-\tilde{\pi}\right) & ; & \mathcal{P}=\frac{\mathcal{N}}{2}\left(E-F\right) & ; & \bar{\mathcal{P}}=\frac{\mathcal{N}}{2}\left(\bar{F}-\bar{E}\right)\,.
\end{array}$$

llegando finalmente a la teoría bajo-derivativa diagonalizada que buscábamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{LD} &= \frac{1}{2}\tilde{A}\wedge *\Box\mathtt{N}\tilde{A} - \frac{1}{2}\tilde{\pi}\wedge *\left(\Box\mathtt{N}+\mathtt{N}\mathtt{M}^{-1}\mathtt{N}\right)\tilde{\pi} + \\
&+ \bar{E}\wedge *\Box\mathcal{N}\,E - \bar{F}\wedge *\left(\Box\mathcal{N}+\mathcal{N}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}\right)F - \\
&- \frac{1}{2\zeta^2}B\wedge *\left(1-\frac{\Box}{M^2}\right)B\,.
\end{aligned}$$

La Lagrangiana $\mathcal{L}_{LD}$ no es local en general debido al “término de masa” $NM^{-1}N$ para el campo $\tilde{\pi}$. Sin embargo la elección de parámetros de gauge $\zeta^2 = m^2/M^2$ hace que sí lo sea.

Escribiendo $\mathcal{L}_{LD} = \mathcal{L}_{LD}^{inv} + \mathcal{L}_{LD}^{gauge}$ donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LD}^{inv} &= -\frac{1}{2} d\tilde{A} \wedge * d\tilde{A} + \frac{1}{2} d\tilde{\pi} \wedge * d\tilde{\pi} - \frac{m^2}{2} d\tilde{\pi} \wedge * \frac{1}{\Box} d\tilde{\pi} \,, \\ \mathcal{L}_{LD}^{gauge} &= \mathcal{L}_{LD} - \mathcal{L}_{LD}^{inv} \end{aligned}$$

son, respectivamente, las partes independientes y dependientes de los parámetros de gauge podemos pensar en $\mathcal{L}_{LD}$ como la suma de una teoría invariante $\mathcal{L}_{LD}^{inv}$ a la cual se ha fijado el gauge $U(1) \times U(1)$,

$$\delta'_g \tilde{A} = d\Lambda' \quad ; \quad \delta''_g \tilde{\pi} = d\Lambda'' \,,$$

por medio de un término de fijación y compensación de gauge $\mathcal{L}_{LD}^{gauge}$.

Si esto fuese cierto la simetría de gauge vendría rota y compensada por la elección de un fermión de fijación de gauge

$$\Psi := -\frac{1}{2\zeta^2} \bar{E} \wedge * \left(B' - \zeta^2 \delta \tilde{A} \right) + \frac{1}{2\zeta^2} \bar{F} \wedge * \left(1 - \frac{M^2}{\Box} \right) \left(B'' - \zeta^2 \delta \tilde{\pi} \right) .$$

De este modo deberíamos tener una Lagrangiana cuántica

$$\mathcal{L}_\Psi := \mathcal{L}_{LD}^{inv} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} = \mathcal{L}_{LD}^{inv} + s\Psi \,,$$

siendo $s = s' \oplus s''$, donde

$$\begin{aligned} & s'\tilde{A} = dE \quad ; \quad s'E = 0 \quad ; \quad s'\bar{E} = B' + \zeta^2 \delta \tilde{A} \quad ; \quad s'B' = \zeta^2 \Box E \,. \\ & s''\tilde{\pi} = dF \quad ; \quad s''F = 0 \quad ; \quad s''\bar{F} = B'' + \zeta^2 \delta \tilde{\pi} \quad ; \quad s''B'' = \zeta^2 \Box F \,. \end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} s\Psi &= \frac{\zeta^2}{2} \delta \tilde{A} \wedge * \delta \tilde{A} - \frac{\zeta^2}{2} \delta \tilde{\pi} \wedge * \left(1 - \frac{M^2}{\Box} \right) \delta \tilde{\pi} + \bar{E} \wedge * \Box E - \bar{F} \wedge * (\Box - M^2) F - \\ &- \frac{1}{2\zeta^2} B' \wedge * B' + \frac{1}{2\zeta^2} B'' \wedge * \left(1 - \frac{M^2}{\Box} \right) B'' \,. \end{aligned}$$

Los términos dependientes de B' y B'' en $\mathcal{L}_\Psi$ hacen que $\mathcal{L}_{LD} \neq \mathcal{L}_\Psi$. Esto es debido a que la simetría original de la teoría alto-derivativa la hereda la teoría bajo-derivativa en la forma

$$\begin{aligned} \delta_g \tilde{A} &= (1 + \mathtt{N}^{-1}\mathtt{M}\Box) d\Lambda = \frac{M^2 - \Box}{M^2}\, d\Lambda \\ \delta_g \tilde{\pi} &= -\mathtt{N}^{-1}\mathtt{M}\Box d\Lambda = \frac{\Box}{M^2}\, d\Lambda\,. \end{aligned}$$

Es decir únicamente este subgrupo $G_1 \subset U(1) \times U(1)$, isomorfo a $U(1)$, es relevante.

Definiendo los operadores

$$\begin{aligned} \mathcal{O}'_{(0)} &:= \frac{M^2 - \Box}{M^2} \qquad\qquad ; \quad \mathcal{O}''_{(0)} := \frac{\Box}{M^2} \\ \mathcal{O}'_{(1)} &:= \frac{M^2 - \Box}{M^2}\theta + \frac{m^2 - \Box}{m^2}\omega \quad ; \quad \mathcal{O}''_{(1)} := \frac{\Box}{M^2}\theta + \frac{\Box}{m^2}\omega\,, \end{aligned}$$

donde el subíndice se refiere a su dominio de actuación (es decir, al orden de las formas diferenciales sobre las que actuan) y utilizamos las propiedades

$$\begin{aligned} &\delta\, \mathcal{O}'_{(1)} = \mathcal{O}'_{(0)}\, \delta \quad ; \quad \mathcal{O}'_{(1)}\, d = d\, \mathcal{O}'_{(0)} \quad ; \\ &\delta\, \mathcal{O}''_{(1)} = \mathcal{O}''_{(0)}\, \delta \quad ; \quad \mathcal{O}''_{(1)}\, d = d\, \mathcal{O}''_{(0)} \quad ; \\ &\mathcal{O}'_{(\alpha)} + \mathcal{O}''_{(\alpha)} = 1_{(\alpha)}\,, \end{aligned}$$

podemos restringirnos a G_1 sin más que definir el campo B en la forma

$$B' = \mathcal{O}'_{(0)} B \quad ; \quad B'' = \mathcal{O}''_{(0)} B\,,$$

junto con las definiciones que derivan de la transformada de Legendre:

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \mathcal{O}'_{(1)} A \quad &; \quad \tilde{\pi} = \mathcal{O}''_{(1)} A \\ E = \mathcal{O}'_{(1)} C \quad &; \quad F = \mathcal{O}''_{(1)} C \\ \bar{E} = \mathcal{O}'_{(1)} \bar{C} \quad &; \quad \bar{F} = \mathcal{O}''_{(1)} \bar{C}\,. \end{aligned}$$

Es sencillo entonces comprobar que el sector dependiente de B' y B'' se recombina para dar el término en B de la teoría alto-derivativa de partida.

$$-\frac{1}{2\zeta^2}B' \wedge *B' + \frac{1}{2\zeta^2}B'' \wedge * \left(1 - \frac{M^2}{\Box}\right) B'' = -\frac{1}{2\zeta^2}B \wedge * \left(1 - \frac{\Box}{M^2}\right) B\,.$$

Un fenómeno similar nos aparecerá en el capítulo cuarto al tratar el caso de la gravitación 4-derivativa fijada de gauge. En ese caso la existencia de unos operadores $\mathcal{O}'$ y $\mathcal{O}''$, que generalizan a los que hemos definido anteriormente, volverá a ser esencial para interpretar la Lagrangiana bajo-derivativa en el sector de Faddeev-Popov.

Capítulo 2

Métodos de reducción de orden diferencial basados en multiplicadores de Lagrange

El uso de multiplicadores de Lagrange, como variante del método de Ostrogradski, en el caso de sistemas mecánicos discretos fue propuesto por T. Nakamura y S. Hamamoto [51] y ha permitido, en esos casos, demostrar la equivalencia cuántica (a través de integración funcional) entre el principio de Hamilton modificado (Lagrangiana de Helmholtz de primer orden) y la teoría alto-derivativa inicial. En este capítulo, con técnicas completamente diferentes, demostraremos que un mecanismo similar funciona para el caso de teorías de campos relativistas en donde los multiplicadores nos permitirán escribir la teoría alto-derivativa como una de segundo orden (con ligaduras) que facilita la interpretación en términos de partículas después de ser diagonalizada [35].

Desarrollaremos este nuevo método en el marco de las teorías de formas diferenciales (de las que tanto escalares como vectores son casos particulares) y en los modelos de gravitación lineal que derivan de acciones cuadráticas en curvaturas.

Desde el punto de vista metodológico, este nuevo método, propuesto en el marco de las teorías bosónicas[1], presenta una marcada diferencia frente al método de Ostrogradski y, además de ser aplicable a teorías de gauge como las de tipo Yang-Mills o Gravitatorias, evita los pesados cálculos de las primeras propuestas en esta dirección [34].

Nuestro propósito se centra en el estudio de los grados de libertad propagados por las teorías que hemos señalado. En consecuencia nos interesaremos primordialmente por la parte libre de los modelos (tanto usuales como alto-derivativos). Las autointeracciones (derivativas o no) y las interacciones con otro tipo de campos externos las englobaremos genéricamente en una corriente j acoplada linealmente al campo fundamental. Desde el punto de vista perturbativo son las teorías cuadráticas cuyos términos de interacción se obtienen como deformación consistente de su parte libre las que podemos aspirar a tratar perturbativamente [52].

Como paso previo realizaremos en el primer apartado un estudio detallado de las Lagrangianas alto-derivativas generales para el campo escalar. Específicamente, pondremos de manifiesto que la degeneración en las masas y/o la aparición de "masas" complejas llevan consigo la propagación de estados de norma negativa. Además indicaremos los problemas asociados con estas situaciones desde el punto de vista de los métodos de reducción de orden diferencial.

[1]El caso fermiónico será tratado en el capítulo cuarto (y en el apéndice C) al introducir el sector anticonmutante de Faddeev-Popov. Las teorías alto-derivativas de campos biespinoriales no serán tratadas en esta memoria como se ha anunciado en la introducción,

2.1 Teorías alto-derivativas para el campo escalar

Las teorías de orden diferencial arbitrario, pero finito, poseen un espectro característico que las distingue de las teorías físicas usuales de segundo orden. Estas incluyen genéricamente estados de tipo "fantasma" (*ghosts*) junto a soluciones que no son de tipo partícula. Aunque estas características no son exclusivas de las teorías alto-derivativas, ya que es posible diseñar teorías de segundo orden con estas complicaciones, son casi inherentes a ellas. La excepción corresponde a casos muy especiales como son las teorías de gravitación construidas mediante potencias de la curvatura escalar. Sin embargo, en situaciones sencillas no hay salida a estos problemas.

Las teorías de campos más simples son las teorías escalares

$$\mathcal{L}^{2N} = -\frac{c_N}{2}\phi\, \mathcal{Q}_N(\Box)\phi - j\phi \tag{2.1}$$

donde $\phi(x)$ es un campo escalar, c_N es una constante de dimensiones apropiadas y $\mathcal{Q}_N(\Box)$ es un polinomio mónico real de orden N en $\Box$. En el primer capítulo hemos realizado un estudio exhaustivo de las teorías (2.1) en las que el polinomio $\mathcal{Q}_N$ presenta únicamente raíces reales no degeneradas. En esos casos la Lagrangiana (2.1) es equivalente a una de segundo orden, construida como combinación alternada en signo de N campos de Klein-Gordon que acoplan su suma a la corriente[2] j. Esto demuestra que todos los grados de libertad son de tipo partícula e interaccionan del mismo modo con la fuente, que permanece como espectador en el proceso de reducción de orden.

Sin embargo esta situación es un caso excepcional de (2.1) debido a que $\mathcal{Q}_N$ puede

[2]Durante todo el primer capítulo hemos supuesto $j = 0$ para evitarnos tener que arrastrar soluciones particulares en las soluciones generales de las ecuaciones de campo. Si la corriente no es nula, las diagonalizaciones ocurren en la parte "libre" mientras que j queda acoplada a la suma $\phi = \phi_1 + \cdots + \phi_N$.

tener raíces degeneradas y/o complejas

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_N(\Box) &= (\Box - m_1^2)^{R_1}\cdots(\Box - m_r^2)^{R_r}(\Box + M_1^2)^{T_1}\cdots(\Box + M_t^2)^{T_t} \\ &\quad [(\Box - \varrho_1)(\Box - \bar{\varrho}_1)]^{C_1}\cdots[(\Box - \varrho_c)(\Box - \bar{\varrho}_c)]^{C_c}\,,\end{aligned}$$

donde las m_i corresponden a las masas físicas, M_i son taquiónicas, ϱ_i son complejas y R_i, T_i y C_i son sus respectivas degeneraciones.

Cuando las raíces son no degeneradas el tratamiento es idéntico al presentado en el capítulo anterior. En este caso solo merecen comentario las raíces complejas. Siguiendo lo tratado en el primer capítulo se puede ver que

$$\mathcal{L}^4 = -\frac{c_4}{2}\phi(\Box - \varrho)(\Box - \bar{\varrho})\phi - j\phi$$

es equivalente a

$$\mathcal{L}^2 = \frac{c_4}{2}(\varrho - \bar{\varrho})[\varphi(\Box - \varrho)\varphi - \bar{\varphi}(\Box - \bar{\varrho})\bar{\varphi}] - j(\varphi + \bar{\varphi})\,, \tag{2.2}$$

donde $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ es un campo escalar complejo. Sin embargo esta no es una diagonalización real debido a que (2.2) no puede ser diagonalizada en términos de campos reales (ni complejos) independientes construidos de forma lineal a través de φ_1 y φ_2, con masas al cuadrado reales.

En el caso degenerado es también imposible interpretar las raíces como masas al cuadrado de estados tipo partícula libre (ni siquiera taquiónicas). De hecho, ni el ejemplo más simple $\phi(\Box - m^2)^2\phi/2$ puede ser reducido a una teoría de campos libres[3] debido a que el propagador alto-derivativo $1/(\Box - m^2)^2$ no es combinación lineal de propagadores libres de segundo orden $1/(\Box \pm m^2)$. En términos del espacio de fases

[3]La reducción de orden diferencial es siempre posible, no así la obtención de ciertas propiedades de la teoría bajo-derivativa equivalente.

covariante, existen soluciones de $(\Box - m^2)^2\phi = 0$ que no lo son de $(\Box - m^2)\phi = 0$, es decir, que no pueden expresarse como superposición de ondas planas.

En resumen, únicamente en el caso de masas al cuadrado reales y no-degeneradas es posible la descomposición algebraica del propagador como suma o resta –dependiendo de que la norma de los estados sea o no física– de propagadores tipo partícula, esto es, en términos de propagadores que muestran masas físicas o taquiónicas. Como es costumbre en la literatura, en lo sucesivo nos restringiremos únicamente al estudio de estos casos.

2.2 El método de los multiplicadores de Lagrange

Plantearemos a continuación, en el marco de las teorías escritas en función de formas diferenciales[4], un método de reducción de orden diferencial basado en el uso de multiplicadores de Lagrange. Desde el punto de vista metodológico, al contrario que ocurría con las técnicas de transformada de Legendre, no será necesario distinguir entre N par y N impar.

La Lagrangiana general que consideraremos es

$$\mathcal{L}^{2N} = \frac{1}{2}\varphi \wedge *(\delta d + m_1^2) \cdots (\delta d + m_N^2)\varphi - j \wedge *\varphi\,,$$

donde tanto φ como la corriente j son s-formas sobre el espacio-tiempo M^m. El resto de la notación ha sido presentada ya en la sección 1.3.2. Para evitarnos complicaciones innecesarias relacionadas con la estructura de espacio afín que presenta el espacio de fases covariante en el caso de que $j \neq 0$ supondremos a partir de ahora que $j = 0$ aunque al final del proceso volveremos a considerar el acoplo a j.

[4]Los campos escalares quedan como caso particular, en el que $\delta d = -\Box$.

Asociada a $\mathcal{L}^{2N}$ tenemos la Lagrangiana de segundo orden

$$\mathcal{L}^{2N}_{Lg} = -\frac{1}{2}\varphi_N \wedge *(\delta d + m_1^2)\varphi_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} \varphi_{N+j} \wedge * \left[\mu^2 \varphi_j - (\delta d + m_{j+1}^2)\varphi_{j+1}\right] ,$$

donde μ es una constante (no nula) con dimensiones de masa, introducida simplemente para que todos los campos tengan la misma dimensión. Los campos φ_i , con $N + 1 \leq i < 2N$, juegan el papel de multiplicadores de Lagrange y el resto son necesarios para la reducción de orden diferencial. Las Lagrangianas $\mathcal{L}^{2N}$ y $\mathcal{L}^{2N}_{Lg}$ conducen al mismo espacio de fases covariante. La razón es la siguiente: las ecuaciones de campo para $\mathcal{L}^{2N}_{Lg}$ son

$$\mu^2 \varphi_i = (\delta d + m_{i+1}^2)\varphi_{i+1} \qquad ; \quad 1 \leq i < N\,. \tag{2.3}$$

$$\mu^2 \varphi_{N+i} = (\delta d + m_i^2)\varphi_{N+i-1} \quad ; \quad 1 \leq i < N\,. \tag{2.4}$$

$$(\delta d + m_1^2)\varphi_1 + (\delta d + m_N^2)\varphi_{2N-1} = 0\,. \tag{2.5}$$

Las ecuaciones (2.3) y (2.4) permiten expresar φ_i, con $1 \leq i < 2N$, en función de derivadas sucesivas de φ_N. En concreto, manipulando las ecuaciones (2.3) se tiene

$$\mu^{2(N-1)}\varphi_1 = (\delta d + m_2^2)\cdots(\delta d + m_N^2)\varphi_N\,. \tag{2.6}$$

De igual manera (2.4) implica

$$\mu^{2(N-1)}\varphi_{2N-1} = (\delta d + m_{N-1}^2)\cdots(\delta d + m_1^2)\varphi_N\,. \tag{2.7}$$

Así, introduciendo (2.6) y (2.7) en (2.5) llegamos a

$$(\delta d + m_1^2)(\delta d + m_2^2)\cdots(\delta d + m_N^2)\varphi_N = 0\,. \tag{2.8}$$

La ecuación (2.8) es la ecuación de campo para $\mathcal{L}^{2N}$ sin más que tomar $\varphi = \varphi_N$.

Una vez estamos seguros de que $\mathcal{L}^{2N}$ y $\mathcal{L}^{2N}_{Lg}$ describen el mismo espacio de soluciones surge, de manera natural, la pregunta de cómo identificar los modos físicos cuando nos decidamos a trabajar en la representación $\mathcal{L}_{Lg}^{2N}$. La forma de proceder consta de dos etapas. En la primera se eliminan los $N-1$ campos (multiplicadores) φ_i, con $N < i < 2N$, en función de los N campos φ_i con $1 \leq i \leq N$. En la segunda se realiza una diagonalización que hace explícitos los grados de libertad.

La manera más limpia de eliminar los multiplicadores de Lagrange es hacer uso de las ecuaciones de campo. Veremos a continuación que es posible expresar este tipo de campos algebraicamente en función del resto. En estas condiciones, nos está permitido sustituir en $\mathcal{L}_{Lg}^{2N}$ dichas relaciones algebraicas para obtener una Lagrangiana independiente de multiplicadores. Explícitamente, de (2.3) podemos despejar

$$\delta d\varphi_{i+1} = \mu^2\varphi_i - m_{i+1}^2\varphi_{i+1} \quad ; \quad 1 \leq i < N\,. \tag{2.9}$$

Ahora, haciendo uso secuencial de las ecuaciones (2.4), en las que en cada paso es necesario utilizar tanto el paso anterior como la correspondiente ecuación (2.9), es posible suprimir los campos φ_i con $N < i < 2N$. Por ejemplo, de (2.4) y (2.9) se tiene

$$\varphi_{N+1} = \frac{1}{\mu^2}\delta d\varphi_N + \frac{m_1^2}{\mu^2}\,\varphi_N = \varphi_{N-1} + \frac{m_1^2 - m_N^2}{\mu^2}\,\varphi_N\,. \tag{2.10}$$

Si ahora volvemos a usar (2.4), junto con (2.9) y (2.10) podemos poner

$$\begin{aligned}
\varphi_{N+2} &= \frac{m_2^2}{\mu^2}\,\varphi_{N+1} + \frac{1}{\mu^2}\delta d\varphi_{N+1} \\
&= \frac{m_2^2}{\mu^2}\left[\varphi_{N-1} + \frac{m_1^2 - m_N^2}{\mu^2}\,\varphi_N\right] + \frac{1}{\mu^2}\delta d\varphi_{N-1} + \frac{m_1^2 - m_N^2}{\mu^4}\delta d\varphi_N \\
&= \varphi_{N-2} + \frac{m_2^2 - m_{N-1}^2 + m_1^2 - m_N^2}{\mu^2}\,\varphi_{N-1} + \frac{(m_1^2 - m_N^2)(m_2^2 - m_N^2)}{\mu^4}\,\varphi_N\,.
\end{aligned}$$

Procediendo de esta forma, y usando el principio de inducción, es tan fácil como pesado demostrar que

$$\varphi_{N+j} \;=\; \sum_{k=0}^{j} C_k^j\,\varphi_{N-j+k}\,, \tag{2.11}$$

donde las constantes C_k^j vienen definidas para $0 \leq k \leq j$ en la forma

$$\begin{aligned} C_0^j &:= 1\,, \\ \mu^{2k} C_k^j &:= \sum_{j_1 \cdots j_k \in \mathcal{R}_j} (m_{j_1}^2 - m_{N+1-j_1}^2) \cdots (m_{j_1+\cdots+j_k}^2 - m_{N+k-j_1-\cdots-j_k}^2)\,, \end{aligned}$$

con

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_k \in \mathcal{R}_j} := \sum_{j_1=1}^{j+1-k} \sum_{j_2=1}^{j+2-k-j_1} \cdots \sum_{j_k=1}^{j-j_1-\cdots-j_{p-1}} .$$

Es posible demostrar [34] que las relaciones (2.11) para los multiplicadores son ligaduras de segunda clase (en el sentido de Dirac) cuando uno se plantea el formalismo Hamiltoniano estándar, *à la* Ostrogradski-Dirac, para la teoría $\mathcal{L}_{Lg}^{2N}$. El problema asociado a la utilización del método de Dirac para la deducción de la fórmula (2.11) es doble. Por un lado está el hecho de que las ligaduras para los multiplicadores van acompañadas de ligaduras análogas en términos de momentos, doblando así el número de pasos en el cálculo. Por otro lado si permitimos simetrías de gauge (tal como hemos hecho) aparecen en el proceso las ligaduras de primera clase aumentando aún más el número de cálculos.

Podemos prescindir de los multiplicadores en $\mathcal{L}_{Lg}^{2N}$ haciendo uso de la ecuación (2.11). Llegamos así a la Lagrangiana de segundo orden diferencial

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &:= -\frac{1}{2}\varphi_N \wedge *(\delta d + m_1^2)\varphi_1 + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=0}^{j} C_k^j\, \varphi_{N-j+k} \wedge *[\mu^2 \varphi_j - (\delta d + m_{j+1}^2)\varphi_{j+1}]\,. \end{aligned}$$

Aunque los campos φ_i que aparecen en $\mathcal{L}^2$ no muestran el contenido en grados de libertad de la teoría, un sencillo razonamiento sobre el espacio de fases covariante $\mathcal{S}$ da cuenta del problema. Sobre $\mathcal{S}$, las ecuaciones de campo (2.3-2.5) permiten despejar

$$\mu^{2(N-1)}\varphi_1 = (\delta d + m_2^2) \cdots (\delta d + m_N^2)\varphi_N\,, \qquad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
\mu^{2(N-2)}\varphi_2 &= (\delta d + m_3^2)\cdots(\delta d + m_N^2)\varphi_N \\
&\cdots \\
\mu^2\varphi_{N-1} &= (\delta d + m_N^2)\varphi_N \,,
\end{aligned}$$

donde, en $\mathcal{S}$

$$\varphi_N = \sum_{a=1}^{N} \phi_a \quad \text{con} \quad (\delta d + m_a^2)\phi_a = 0 \,. \tag{2.13}$$

Introduciendo (2.13) en (2.12), junto con la propia ecuación (2.13), llegamos finalmente a

$$\begin{aligned}
\mu^{2(N-1)}\varphi_1 &= (m_2^2 - m_1^2)\cdots(m_N^2 - m_1^2)\,\phi_1 \,, \\
\mu^{2(N-2)}\varphi_2 &= (m_3^2 - m_1^2)\cdots(m_N^2 - m_1^2)\phi_1 + (m_3^2 - m_2^2)\cdots(m_N^2 - m_2^2)\phi_2 \,, \\
&\cdots \\
\mu^2\varphi_{N-1} &= (m_N^2 - m_1^2)\phi_1 + \cdots + (m_N^2 - m_{N-1}^2)\phi_{N-1} \,, \\
\varphi_N &= \phi_1 + \cdots + \phi_N \,.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Si en las ecuaciones (2.14) pensamos en los campos ϕ_a como arbitrarios (no sujetos a $(\delta d + m_a^2)\phi_a = 0$) obtenemos la transformación que diagonaliza $\mathcal{L}^2$ en la forma

$$\mathcal{L}^2 = \sum_{a=1}^{N} \frac{\prod_{b\neq a}(m_b^2 - m_a^2)}{2\mu^{2(N-1)}}\,\phi_a \wedge *(\delta d + m_a^2)\phi_a - j \wedge * \sum_{a=1}^{N} \phi_a \,.$$

La razón por la que transformación (2.14) lleva al resultado deseado vuelve a encontrarse en el último párrafo de la sección 1.2. Nótese que, al final del proceso, hemos vuelto a conectar la corriente j acoplada al campo $\varphi_N = \phi_1 + \cdots + \phi_N$.

Una ventaja obvia frente al procedimiento basado en la transformada de Legendre radica en que, manteniendo en dos el número de pasos a realizar –eliminación de multiplicadores frente a transformada de Legendre y diagonalización de las variables–

no es necesario distinguir entre los N pares e impares. Por otra parte, es sencillo encontrar la manera de aplicar el método a otros tipos de teorías de campo. Aunque la generalización no es única (existen multitud de variantes que adaptan el método a cada caso particular) la estructura concreta en cada situación da pistas claras de cómo actuar.

2.3 Teorías escritas en términos de un tensor simétrico $h_{\mu\nu}$

En el tercer capítulo realizaremos un estudio detallado de las teorías de gravitación cuadráticas en curvaturas, tanto linealizadas como completas. En este punto vamos simplemente a comparar el funcionamiento de las dos técnicas desarrolladas hasta el momento sobre el modelo resultante de linealizar la acción

$$S^4_{Grav} = \int_{M^4} d^4x \sqrt{-g}\,[aR + bR^2 + cR^{\mu\nu}R_{\mu\nu}]$$

en torno a la métrica de Minkowski[5]. El principio de acción que debemos considerar es

$$\mathcal{S}^4_{Grav\,Lin} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x\,\mathcal{L}^4 = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x\,\left[\frac{a}{2}h_{\mu\nu}G^{\mu\nu\,\alpha\beta}r_{\alpha\beta} + r_{\mu\nu}Q^{\mu\nu\,\alpha\beta}(b,c)r_{\alpha\beta}\right]\,,$$

con a, b y c constantes reales, siendo $r_{\mu\nu}$ la combinación de derivadas de $h_{\mu\nu}$ que vienen de linealizar el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$,

$$r_{\mu\nu} \;=\; \mathcal{R}_{\mu\nu\,\alpha\beta}h^{\alpha\beta} := \frac{1}{2}\,[h^{\alpha}{}_{\mu,\nu\alpha} + h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} - \Box h_{\mu\nu} - h^{\alpha}{}_{\alpha,\mu\nu}]\;,$$

donde hemos aprovechado para definir el operador diferencial de segundo orden $\mathcal{R}_{\mu\nu\,\alpha\beta}$. $G^{\mu\nu\,\alpha\beta}$ y $Q^{\mu\nu\,\alpha\beta}$ son las matrices numéricas

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu\,\alpha\beta} &:= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right]\,,\\ Q^{\mu\nu\,\alpha\beta}(b,c) &:= b\,\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \frac{c}{2}\left[\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right]\,. \end{aligned}$$

[5]Una justificación, mayores detalles y la linearización de esta acción se dan en la sección 3.1 del próximo capítulo.

Las propiedades de estos objetos que necesitaremos utilizar son las siguientes[6]: Aunque $\mathcal{R}_{\mu\nu\,\alpha\beta}$ no es simétrico respecto del pseudo-producto escalar

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x\, h_1^{\mu\nu}(x) h_{2\mu\nu}(x)\,,$$

la combinación $G^{\mu\nu\,\rho\sigma}\mathcal{R}_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta}$ sí lo es. Formalmente $\mathcal{R}^{\mathtt{t}} \neq \mathcal{R}$ pero $(G\mathcal{R})^{\mathtt{t}} = R^{\mathtt{t}}G = G\mathcal{R}$, donde $\mathtt{t}$ denota la trasposición respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. La matriz G coincide con su inversa $(G^{-1})^{\mu\nu\,\alpha\beta} = G^{\mu\nu\,\alpha\beta}$ (es decir $GG = \bar{\eta}$) mientras que Q sólo es invertible cuando[7] $c \neq 0$ y $4b + c \neq 0$

$$(Q^{-1})^{\mu\nu\,\alpha\beta}(b,c) = \frac{1}{2c}[\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}] - \frac{b}{(4b+c)c}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\,.$$

Supondremos, para fijar ideas, que nos encontramos en la situación favorable en la que Q es invertible.

Haciendo uso de estas propiedades la ecuación de campo para $h_{\mu\nu}$

$$\left[aG\mathcal{R} + 2\mathcal{R}^{\mathtt{t}}Q\mathcal{R}\right] h = 0$$

se puede expresar de la forma

$$\left[G\mathcal{R}\, GQG + \frac{a}{2}\right] G\mathcal{R}h = G\mathcal{R}\left[GQG\, G\mathcal{R} + \frac{a}{2}\right] h = 0\,, \tag{2.15}$$

en donde, a partir de ahora, omitiremos aquellos índices que no presenten problemas de interpretación. La solución general de (2.15) es

$$h = \mathtt{h}_1 + \mathtt{h}_2\,,$$

[6]En la notación del apéndice A podemos poner $G = \frac{1}{2}\bar{\bar{\eta}} - \bar{\eta}$, $Q(b,c) = b\bar{\bar{\eta}} + c\bar{\eta}$ y $G\mathcal{R} = \Box\left(\frac{1}{2}P^{(2)} - P^{(S)}\right)$. Estas identidades, junto con el hecho de que $\bar{\bar{\eta}}^2 = 4\bar{\bar{\eta}}$, son suficientes para demostrar todas las propiedades de interés.

[7]El caso $c = 0$ representa un salto en los grados de libertad de la teoría. Por el contrario, $4b + c = 0$ no indica ninguna discontinuidad en el número de grados de libertad sino simplemente que la Lagrangiana es singular en $R_{\mu\nu}$.

donde $\mathtt{h}_1$ y $\mathtt{h}_2$ satisfacen, respectivamente (recuérdese que estamos considerando Q invertible)

$$G\mathcal{R}\,\mathtt{h}_1 = 0 \quad ; \quad G\mathcal{R}\,\mathtt{h}_2 = -\frac{a}{2}GQ^{-1}G\,\mathtt{h}_2\,. \tag{2.16}$$

2.3.1 Multiplicadores de Lagrange

El método de los multiplicadores de Lagrange comienza asociando a $\mathcal{L}^4$ la Lagrangiana

$$\mathcal{L}^4_{Lg} = h_2^{\mathtt{t}}\left[\mathcal{R}^{\mathtt{t}}QG + \frac{a}{2}\right]h_1 + h_3^{\mathtt{t}}[\mu^2 h_1 - G\mathcal{R}h_2]\,.$$

en la que h_3 juega el papel de multiplicador de Lagrange. Las ecuaciones de campo para $\mathcal{L}^4_{Lg}$

$$\left[\mathcal{R}^{\mathtt{t}}QG + \frac{a}{2}\right]h_1 - G\mathcal{R}h_3 = 0\,, \tag{2.17}$$

$$\mu^2 h_3 + \left[\frac{a}{2} + GQ\mathcal{R}\right]h_2 = 0\,, \tag{2.18}$$

$$\mu^2 h_1 - G\mathcal{R}h_2 = 0 \tag{2.19}$$

nos permiten despejar $G\mathcal{R}h_2 = \mu^2 h_1$. Así, usando (2.18) es posible expresar de forma algebraica –en la que el operador diferencial $\mathcal{R}$ no está presente– h_3 en función de h_1 y h_2:

$$h_3 = -\frac{a}{2\mu^2}h_2 - GQGh_1\,.$$

Eliminando h_3 en $\mathcal{L}^4_{Lg}$ llegamos a

$$\mathcal{L}^2 = \frac{a}{2\mu^2}h_2^{\mathtt{t}}G\mathcal{R}h_2 + 2h_1^{\mathtt{t}}GQ\mathcal{R}h_2 - \mu^2 h_1^{\mathtt{t}}GQGh_1\,. \tag{2.20}$$

La diagonalización de (2.20) se consigue a través de la redefinición

$$\begin{aligned} h_1 &= -\frac{a}{2\mu^2}GQ^{-1}G\,\mathtt{h}_2 \\ h_2 &= \mathtt{h}_1 + \mathtt{h}_2\,, \end{aligned}$$

que viene sugerida por las ecuaciones (2.16). En estas variables

$$\mathcal{L}^2 = \frac{a}{2\mu^2}\,\mathtt{h}_1\, G\mathcal{R}\,\mathtt{h}_1 - \frac{a}{2\mu^2}\,\mathtt{h}_2\, G\mathcal{R}\,\mathtt{h}_2 - \frac{a^2}{4\mu^2}\,\mathtt{h}_2\, GQ^{-1}G\,\mathtt{h}_2\,.$$

De aquí que $\mathtt{h}_1$ describa, tal como se indicará en el siguiente capítulo, un espín dos sin masa (gravitón) y $\mathtt{h}_2$ un espín dos masivo con $m_2^2 = -a/c$ y norma negativa junto a un escalar de masa $m_0^2 = a/2(c+3b)$.

2.3.2 Transformación de Legendre

El operador diferencial, simétrico bajo $\langle\cdot,\cdot\rangle$, a nuestra disposición es

$$D := G\mathcal{R}\,.$$

Definiendo entonces la transformada de Legendre

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}^4}{\partial Dh} = 2GQG\,Dh + \frac{a}{2}h$$

e invirtiendo $Dh(h,\pi)$ llegamos, a través del procedimiento habitual, a la Lagrangiana de Helmholtz

$$\mathcal{L}_H = \pi^{\mathtt{t}}Dh - \frac{1}{4}\left[\pi - \frac{a}{2}h\right]^{\mathtt{t}} GQ^{-1}G\left[\pi - \frac{a}{2}h\right]\,.$$

La diagonalización de $\mathcal{L}_H$ tiene lugar mediante el cambio, motivado una vez más por la estructura del espacio de fases covariante,

$$\mu^2 h = \mathtt{h}_1 + \mathtt{h}_2 \quad ; \quad \mu^2\pi = \frac{a}{2}[\mathtt{h}_1 - \mathtt{h}_2]\,,$$

en donde la constante μ^2 ha sido introducida para facilitar la comparación con el método anterior. En estas variables $\mathcal{L}_H$ coincide exactamente con la Lagrangiana $\mathcal{L}^2$ del método de los multiplicadores de Lagrange.

Capítulo 3

Modelos de gravitación R^2. Teoría invariante

En este capítulo estudiaremos los efectos que las correcciones cuadráticas en curvaturas producen sobre la gravitación de Einstein. Las primeras secciones están dedicadas a caracterizar los grados de libertad que propaga una teoría con potencias de la curvatura. Para esta tarea seguiremos dos caminos. El primero se basa en la utilización de técnicas simplécticas covariantes [36]. El segundo nos permitirá reobtener los mismos resultados, de una forma más rápida, a través del formalismo de proyectores de espín [42]. La última sección se ocupa de la teoría no polinómica. Haciendo uso de de la transformada de Legendre covariante, presentada en el primer capítulo, pondremos en correspondencia la acción alto-derivativa con una suma de acciones bajo-derivativas. Debido a que la reducción de orden diferencial se puede realizar de múltiples maneras hay en la literatura gran variedad de propuestas al respecto [23], [24], [25] que conducen a teorías bajo-derivativas distintas al menos en apariencia. Discutiremos algunas de ellas indicando los valores de las constantes de acoplo en las que se vuelven singulares y finalmente propondremos la solución más apropiada desde el punto de vista de los grados de libertad.

3.1 La Lagrangiana linealizada y la forma simpléctica inducida

Nuestro pundo de partida será la acción

$$S^4_{Grav}[g_{\mu\nu}] = \int_M \sqrt{-g}\,\left[aR + bR^2 + cR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right]\,, \tag{3.1}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci para la métrica $g_{\mu\nu}$, $R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ es la curvatura escalar, a es una constante con dimensiones de masa al cuadrado y b y c son constantes adimensionales. Este es el principio variacional más general sobre el conjunto de métricas pseudoriemanianas $g_{\mu\nu}$, definidas en un espacio-tiempo ("topológicamente trivial") de cuatro dimensiones M, cuando obligamos a la acción a ser invariante bajo difeomorfismos y a no depender de potencias cúbicas o superiores de las curvaturas[1]. Supondremos que el espacio tiempo es topológicamente trivial de manera que se satisface la identidad de Gauss-Bonnet. Esta identidad nos permite escribir los términos de la forma $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}R_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}$ en función de R^2, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ y derivadas totales.

Aunque las constantes reales a, b y c son en principio arbitrarias, en lo que sigue consideraremos siempre que $a > 0$ ya que estamos interesados en las correcciones sobre la gravitación usual que producen los términos del tipo[2] R^2.

Recientemente M. Henneaux y G. Barnich [52] han conseguido formalizar el concepto de *teoría perturbativamente tratable*. Estas teorías son aquellas que se obtienen como deformación *consistente* (manteniendo el número de grados de libertad y simetrías de gauge) de su parte cuadrática. Así, el estudio perturbativo comienza por el estudio de la parte libre de la acción (3.1). Escribiendo $g_{\mu\nu}$ como suma de la métrica de

[1] Las potencias cúbicas o superiores no tiene efectos sobre el número de grados de libertad debido a que no afectan a los propagadores.

[2] Es habitual referirse a todas las potencias cuadráticas en curvaturas (no solo a las de la curvatura escalar) contenidas en la acción (3.1) como "términos del tipo R^2".

Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,+,+)$ y una perturbación $h_{\mu\nu}$, el desarrollo de (3.1) en potencias de $h_{\mu\nu}$ conduce a la siguiente Lagrangiana cuadrática en $h_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^4 = & \frac{a}{4}h^{\mu}{}_{\mu,\alpha}h^{\nu}{}_{\nu}{}^{,\alpha} - \frac{a}{4}h^{\mu\nu,\alpha}h_{\mu\nu,\alpha} + \frac{a}{2}h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} - \frac{a}{2}h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\alpha}{}_{\alpha,\mu} + \\ & + \frac{c}{4}h^{\mu\nu,\alpha\beta}h_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{c}{2}h^{\mu\nu}{}_{,\nu\beta}h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha\beta} - \frac{c+4b}{2}h^{\mu\nu}{}_{,\nu\beta}h^{\alpha}{}_{\alpha,\mu}{}^{\beta} + \\ & + \frac{c+2b}{2}(h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu})^2 + \frac{c+4b}{4}(h^{\mu}{}_{\mu}{}^{,\nu}{}_{\nu})^2 \,.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Los grados de libertad físicos se definen como pares de variables reales, *canónicamente conjugadas* módulo transformaciones de gauge. Para dar sentido al término *variables canónicamente conjugadas*, y en consecuencia al concepto de grado de libertad, es necesario contar con una estructura simpléctica –una dos-forma, cerrada y no degenerada [53]– sobre el espacio de modos efectivos. Un método que ha demostrado adaptarse de manera especial a las teorías cuadráticas [40], debido a que proporciona toda la información física relevante, es el método covariante desarrollado por E. Witten y Č. Crnković [36] y generalizado posteriormente por V. Aldaya, M. Navarro y J. Navarro-Salas [38] al caso de teorías de campo de orden diferencial superior a dos. Este tipo de técnicas permiten construir, a partir de la acción, una forma simpléctica sobre el espacio de soluciones de las ecuaciones de campo (*espacio de fases covariante*). Además, es facil demostrar [36] que la forma simpléctica es capaz de generar, mediante manipulaciones sencillas, las cantidades conservadas de la teoría: Hamiltoniano, momento angular,. . . indispensables para la caracterización de los grados de libertad efectivos.

Aplicando el procedimiento general de [38], la Lagrangiana (3.2) define una estructura presimpléctica (en principio puede ser degenerada) sobre el espacio de tensores simétricos $h_{\mu\nu}$ mediante la expresión

$$\Omega = \int_{\Sigma} d^{\alpha}\sigma\, \omega_{\alpha}\,,$$

siendo Σ una sección espacial del espacio-tiempo (hipersuperficie t constante), $d^\alpha\sigma$ la medida de integración sobre Σ y

$$\omega^\alpha = \mathbb{d}\left(\frac{\partial\mathcal{L}^4}{\partial h_{\mu\nu,\alpha}} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}^4}{\partial h_{\mu\nu,\alpha\beta}}\right) \curlywedge \mathbb{d}h_{\mu\nu} + \mathbb{d}\frac{\partial\mathcal{L}^4}{\partial h_{\mu\nu,\alpha\beta}} \curlywedge \mathbb{d}h_{\mu\nu,\beta}\,,$$

donde por $\mathbb{d}$ y $\curlywedge$ denotaremos, respectivamente, la derivada exterior y el producto exterior en el espacio de los campos $h_{\mu\nu}(x)$. Debido a que $\partial_\alpha\omega^\alpha = 0$ sobre el subespacio de soluciones de las ecuaciones de campo, tenemos garantizada la independencia en el tiempo de Ω. Esto quedará de manifiesto cuando escribamos Ω en términos de los modos que se propagan.

Explícitamente, ω^α viene dada por la expresión

$$\begin{aligned}
\omega^\alpha \;=\;& \frac{a}{2}\mathbb{d}h^{,\alpha} \curlywedge \mathbb{d}h - \frac{a}{2}\mathbb{d}h^{\mu\nu,\alpha} \curlywedge \mathbb{d}h_{\mu\nu} + a\mathbb{d}h_{\mu\rho}{}^{,\rho} \curlywedge \mathbb{d}h^{\mu\alpha} - \\
&-\frac{a}{2}\mathbb{d}h_{,\mu} \curlywedge \mathbb{d}h^{\mu\alpha} - \frac{a}{2}\mathbb{d}h^{\alpha\rho}{}_{,\rho} \curlywedge \mathbb{d}h - \frac{c}{2}\Box\mathbb{d}h^{\mu\nu,\alpha} \curlywedge \mathbb{d}h_{\mu\nu} + \\
&+\frac{c}{2}\Box\mathbb{d}h_{\mu\rho}{}^{,\rho} \curlywedge \mathbb{d}h^{\mu\alpha} + \frac{c}{2}\mathbb{d}h^{\mu\rho,\nu\alpha}{}_{\rho} \curlywedge \mathbb{d}h_{\mu\nu} + \frac{c+4b}{4}\Box\mathbb{d}h_{,\mu} \curlywedge \mathbb{d}h^{\mu\alpha} + \\
&+\frac{c+4b}{4}\mathbb{d}h^{,\mu\nu\alpha} \curlywedge \mathbb{d}h_{\mu\nu} + \frac{c+4b}{4}\Box\mathbb{d}h^{\alpha\mu}{}_{,\mu} \curlywedge \mathbb{d}h + \frac{c+4b}{4}\mathbb{d}h_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu\alpha} \curlywedge \mathbb{d}h - \\
&-(c+2b)\mathbb{d}h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu\rho} \curlywedge \mathbb{d}h^{\rho\alpha} - \frac{c+4b}{2}\mathbb{d}h_{,\mu}{}^{\mu\alpha} \curlywedge \mathbb{d}h + \frac{c}{2}\mathbb{d}h^{\mu\nu,\alpha\rho} \curlywedge \mathbb{d}h_{\mu\nu,\rho} - \\
&-\frac{c}{2}\mathbb{d}h_{\mu\nu}{}^{,\nu\rho} \curlywedge \mathbb{d}h^{\mu\alpha}{}_{,\rho} - \frac{c}{2}\mathbb{d}h_{\mu\nu}{}^{,\nu\alpha} \curlywedge \mathbb{d}h^{\mu\rho}{}_{,\rho} - \frac{c+4b}{4}\mathbb{d}h_{,\mu\nu} \curlywedge \mathbb{d}h^{\mu\alpha,\nu} - \\
&-\frac{c+4b}{4}\mathbb{d}h^{,\mu\alpha} \curlywedge \mathbb{d}h_{\mu\nu}{}^{,\nu} - \frac{c+4b}{4}\mathbb{d}h^{\alpha\mu}{}_{,\mu\nu} \curlywedge \mathbb{d}h^{,\nu} - \frac{c+4b}{4}\mathbb{d}h_{\mu\nu}{}^{,\nu\alpha} \curlywedge \mathbb{d}h^{,\mu} + \\
&+(c+2b)\mathbb{d}h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} \curlywedge \mathbb{d}h^{\alpha\rho}{}_{,\rho} + \frac{c+4b}{2}\Box\mathbb{d}h \curlywedge \mathbb{d}h^{,\alpha}\,,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$, $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ y todos los índices han sido subidos con la métrica de Minkowski[3]. Para encontrar los grados de libertad efectivos es necesario particularizar (3.3) sobre el espacio de soluciones de las ecuaciones de campo. Por ello, como primer

[3]No debe confundirse $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ con la inversa de $h_{\mu\nu}$.

paso, dedicaremos la siguiente sección a la resolución de las ecuaciones. Como veremos, según los diferentes valores de los parámetros a, b y c y las posibles relaciones entre ellos, la restricción de Ω al espacio de soluciones tendrá distintas interpretaciones.

3.2 Solución de las ecuaciones de campo linealizadas

Las ecuaciones de campo que se derivan de la Lagrangiana (3.2) son

$$\begin{aligned}(a+c\Box)\Box h_{\mu\nu} - (a+c\Box)h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} - (a+c\Box)h_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\mu} + [a-(c+4b)\Box]h^{\alpha}{}_{\alpha,\mu\nu} + \\ +2(c+2b)h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta}{}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}[a-(c+4b)\Box](h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \Box h^{\alpha}{}_{\alpha}) = 0\,.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Para resolver estas ecuaciones elegiremos coordenadas inerciales $(\vec{x}, t)$ y tomaremos la transformada de Fourier espacial en los campos:

$$f(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k}\, f(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,.$$

Usaremos la misma letra para denotar un campo y su transformada, y el convenio de distingirlos por su argumento. Al tomar la transformada de Fourier las ecuaciones en derivadas parciales se convierten en ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya solución general seremos capaces de escribir exactamente.

En el espacio de momentos, la parametrización del campo $h_{\mu\nu}(\vec{k}, t)$ que facilita la resolución de las ecuaciones de campo es

$$\begin{aligned}&h_{00}(\vec{k}, t)\\ &h_{0i}(\vec{k}, t) = ik_i\phi(\vec{k}, t) + \beta_i(\vec{k}, t)\\ &h_{ij}(\vec{k}, t) = k_ik_j\varphi(\vec{k}, t) + ik_i\alpha_j(\vec{k}, t) + ik_j\alpha_i(\vec{k}, t) + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{w^2}\right)\tau(\vec{k}, t) + h^{TT}_{ij}(\vec{k}, t)\,.\end{aligned} \tag{3.5}$$

De aquí en adelante $w := +\sqrt{\vec{k}\cdot\vec{k}}$. Los campos β_i, α_i son transversales y el campo h_{ij}^{TT} es simétrico, transversal y de traza nula. Nótese que, de este modo, estamos considerando las diez componentes independientes del tensor simétrico $h_{\mu\nu}$ en dimensión cuatro: una componente en h_{00}, una en ϕ, dos en β_i, una en φ, dos en α_i, una en τ y las dos restantes en h_{ij}^{TT}. En esta parametrización, es directo resolver las diferentes componentes de la ecuación de campo.

- **Componente 00.** La componente 00 de la ecuación (3.4) en la parametrización (3.5) es

$$\begin{aligned}2w^2(c+2b)h_{00} &= 4w^2(c+2b)\dot{\phi}+2w^2(c+2b)\ddot{\phi}+ \\ &+(c+4b)\ddot{\tau}+[a+(c+4b)w^2]\tau\,.\end{aligned} \tag{3.6}$$

  Por tanto:

  - Si $b=c=0$ se tiene

  $$\tau=0\,.$$

  - Si $c+2b\neq 0$ obtenemos una ligadura sobre h_{00}:

  $$h_{00}=2\dot{\phi}+\ddot{\varphi}+\frac{c+4b}{2w^2(c+2b)}\ddot{\tau}+\frac{a+(c+4b)w^2}{2w^2(c+2b)}\tau\,.$$

  - Si $c+2b=0$, con $c\neq 0$, τ satisface la ecuación diferencial

  $$\ddot{\tau}+(w^2-a/c)\tau=0\,,$$

  cuya solución general es de la forma

  $$\tau(\vec{k},t)=\chi(\vec{k})e^{-iw_2t}+\bar{\chi}(-\vec{k})e^{iw_2t}\,,\ \text{con}\, w_2:=+\sqrt{w^2-a/c}\,.$$

- **Componentes $0i$.** La componente $0i$ de (3.4) nos dice

$$c\ddot{\beta}_i - c\,\dddot{\alpha}_i + (cw^2 - a)(\beta_i - \dot{\alpha}_i) = 0\,. \tag{3.7}$$

  Debemos distinguir dos casos:

  - Si $c = 0$ tenemos la ligadura

$$\beta_i = \dot{\alpha}_i\,.$$

  - Si $c \neq 0$ debe ser

$$\beta_i(\vec{k},t) - \dot{\alpha}_i(\vec{k},t) = \gamma_i(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{\gamma}_i(-\vec{k})e^{iw_2t}\,.$$

- **Componentes ij.** Estas ecuaciones vienen separadas en varios sectores. El primer sector corresponde a que los dos índices ij apunten en la dirección de $\vec{k}$. El segundo sector tiene un índice en la dirección de $\vec{k}$ y el otro transverso. El tercer sector, con ambos índices transversos, se divide a su vez como suma de la parte de traza nula más la parte de traza.

  Las ecuaciones para los dos primeros sectores se satisfacen indénticamente como consecuencia de las ecuaciones (3.6) y (3.7). El que esto ocurra es por tanto independiente de las posibles relaciones entre los parámetros a, b y c.

  La ecuación para el sector transverso y de traza nula es

$$(c\partial_0^2 + cw^2 - a)(\partial_0^2 + w^2)h_{ij}^{TT} = 0\,,$$

  lo que obliga a considerar dos casos a la hora de escribir su solución general:

  - Si $c = 0$ es

$$h_{ij}^{TT}(\vec{k},t) = h_{ij}^{TT}(\vec{k})e^{-iwt} + \bar{h}_{ij}^{TT}(-\vec{k})e^{iwt}\,.$$

- Si $c \neq 0$ tenemos que

$$h_{ij}^{TT}(\vec{k},t) = h_{ij}^{TT}(\vec{k})e^{-iwt} + \bar{h}_{ij}^{TT}(-\vec{k})e^{iwt} +$$
$$+h_{2\,ij}^{TT}(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{h}_{2\,ij}^{TT}(-\vec{k})e^{iw_2t}\,.$$

Por último, para resolver la ecuación en la componente de traza, es necesario usar la ecuación que se deriva de (3.6). Existe por tanto la siguiente casuística:

- Si $b = c = 0$, la ecuación se satisface idénticamente.
- Si $b \neq 0$, $c = 0$ se tiene

$$\ddot{\tau} + \left(w^2 + \frac{a}{6b}\right)\tau = 0\,,$$

de donde

$$\tau(\vec{k},t) = \tau_0(\vec{k})e^{-iw_0t} + \bar{\tau}_0(-\vec{k})e^{iw_0t} \quad \text{con} \quad w_0 := +\sqrt{w^2 + a/(6b)}\,.$$

- Si $c + 2b = 0$, $c \neq 0$, la ecuación de traza es

$$\partial_0^2\left[h_{00} - \ddot{\varphi} - 2\dot{\phi}\right] + (w^2 - a/c)\left[h_{00} - \ddot{\varphi} - 2\dot{\phi}\right]\,,$$

de aquí que se tenga

$$h_{00}(\vec{k},t) - \ddot{\varphi}(\vec{k},t) - 2\dot{\phi}(\vec{k},t) = \xi(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{\xi}(-\vec{k})e^{iw_2t}\,.$$

- Si $c + 2b \neq 0$, existen dos subcasos:
  - Cuando $c + 3b = 0$ tenemos la ecuación de segundo orden

$$\ddot{\tau} + (w^2 - a/c)\tau = 0$$

y en consecuencia

$$\tau(\vec{k},t) = \tau_2(\vec{k})e^{-iwt} + \bar{\tau}_2(-\vec{k})e^{iwt}\,.$$

· Cuando $c + 3b \neq 0$ la ecuación es de cuarto orden

$$\left(\partial_0^2 + w^2 - \frac{a}{c}\right)\left(\partial_0^2 + w^2 + \frac{a}{2(c+3b)}\right)\tau = 0\,,$$

por lo que, en este caso, se tiene

$$\tau(\vec{k},t) = \tau_0(\vec{k})e^{-iw_0 t} + \bar{\tau}_0(-\vec{k})e^{iw_0 t} + \tau_2(\vec{k})e^{-iw_2 t} + \bar{\tau}_2(-\vec{k})e^{iw_2 t}\,,$$

con $w_0 := +\sqrt{w^2 + m_0^2}$, siendo $m_0^2 := a/2(c+3b)$.

En la siguiente página se encuentran resumidas, en forma de tabla, las parametrizaciones que hemos obtenido durante el proceso de resolución de las ecuaciones lineales. Más adelante, al introducir el formalismo de proyectores de espín, volveremos sobre estas parametrizaciones para reinterpretarlas como suma de subespacios de espín caracterizados por masas bien definidas.

Aunque hemos introducido ya, según nos ha ido haciendo falta al resolver las ecuaciones de campo, la expresión de los parámetros de masa m_i^2, $i = 0, 2$, en función de las constantes a, b y c, recogemos a continuación estas definiciones para hacer más fácil la interpretación de la tabla de parametrizaciones:

$$\begin{aligned} m_0^2 &= \frac{a}{2(c+3b)}\,, \\ m_2^2 &= -\frac{a}{c}\,, \end{aligned}$$

y como viene siendo habitual $w_i := +\sqrt{w^2 + m_i^2}$. Además, las funciones $\phi(\vec{k},t)$, $\varphi(\vec{k},t)$ y $\alpha_i(\vec{k},t)$ son arbitrarias en todos los casos.

Caso	Parametrización
$b = c = 0$	$h_{00}(\vec{k},t) = 2\dot{\phi}(\vec{k},t) + \ddot{\varphi}(\vec{k},t)$ $h_{0i}(\vec{k},t) = ik_i\phi(\vec{k},t) + \dot{\alpha}_i(\vec{k},t)\,.$ $h_{ij}(\vec{k},t) = k_ik_j\varphi(\vec{k},t) + ik_i\alpha_j(\vec{k},t) + ik_j\alpha_i(\vec{k},t) +$ $\quad + h^{TT}_{ij}(\vec{k})e^{-iwt} + \bar{h}^{TT}_{ij}(-\vec{k})e^{iwt}$
$b \neq 0,\ c = 0$	$h_{00}(\vec{k},t) = 2\dot{\phi}(\vec{k},t) + \ddot{\varphi}(\vec{k},t) + \frac{m_0^2}{2w^2}\left[\tau_0(\vec{k})e^{-iw_0t} + \bar{\tau}_0(-\vec{k})e^{iw_0t}\right]$ $h_{0i}(\vec{k},t) = ik_i\phi(\vec{k},t) + \dot{\alpha}_i(\vec{k},t)\,.$ $h_{ij}(\vec{k},t) = k_ik_j\varphi(\vec{k},t) + ik_i\alpha_j(\vec{k},t) + ik_j\alpha_i(\vec{k},t) +$ $\quad + \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{w^2}\right)\left[\tau_0(\vec{k})e^{-iw_0t} + \bar{\tau}_0(-\vec{k})e^{iw_0t}\right] +$ $\quad + h^{TT}_{ij}(\vec{k})e^{-iwt} + \bar{h}^{TT}_{ij}(-\vec{k})e^{iwt}$
$c + 3b = 0$	$h_{00}(\vec{k},t) = 2\dot{\phi}(\vec{k},t) + \ddot{\varphi}(\vec{k},t) - \frac{m_2^2}{w^2}\left[\tau_2(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{\tau}_2(-\vec{k})e^{iw_2t}\right]$ $h_{0i}(\vec{k},t) = ik_i\phi(\vec{k},t) + \dot{\alpha}_i(\vec{k},t) + \gamma_{2\,i}(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{\gamma}_{2\,i}(-\vec{k})e^{iw_2t}$ $h_{ij}(\vec{k},t) = k_ik_j\varphi(\vec{k},t) + ik_i\alpha_j(\vec{k},t) + ik_j\alpha_i(\vec{k},t) +$ $\quad + \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{w^2}\right)\left[\tau_2(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{\tau}_2(-\vec{k})e^{iw_2t}\right] +$ $\quad + h^{TT}_{ij}(\vec{k})e^{-iwt} + \bar{h}^{TT}_{ij}(-\vec{k})e^{iwt} + h^{TT}_{2\,ij}(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{h}^{TT}_{2\,ij}(-\vec{k})e^{iw_2t}$
$c + 3b \neq 0$ $c + 2b \neq 0$	$h_{00}(\vec{k},t) = 2\dot{\phi}(\vec{k},t) + \ddot{\varphi}(\vec{k},t) - \frac{m_2^2}{w^2}\left[\tau_2(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{\tau}_2(-\vec{k})e^{iw_2t}\right]$ $\quad + \frac{m_0^2}{2w^2}\left[\tau_0(\vec{k})e^{-iw_0t} + \bar{\tau}_0(-\vec{k})e^{iw_0t}\right]$ $h_{0i}(\vec{k},t) = ik_i\phi(\vec{k},t) + \dot{\alpha}_i(\vec{k},t) + \gamma_{2\,i}(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{\gamma}_{2\,i}(-\vec{k})e^{iw_2t}\,.$ $h_{ij}(\vec{k},t) = k_ik_j\varphi(\vec{k},t) + ik_i\alpha_j(\vec{k},t) + ik_j\alpha_i(\vec{k},t) +$ $\quad + \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{w^2}\right)\left[\tau_2(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{\tau}_2(-\vec{k})e^{iw_2t} + \tau_0(\vec{k})e^{-iw_0t} + \bar{\tau}_0(-\vec{k})e^{iw_0t}\right] +$ $\quad + h^{TT}_{ij}(\vec{k})e^{-iwt} + \bar{h}^{TT}_{ij}(-\vec{k})e^{iwt} + h^{TT}_{2\,ij}(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{h}^{TT}_{2\,ij}(-\vec{k})e^{iw_2t}$
$c + 2b = 0$	$h_{00}(\vec{k},t) = 2\dot{\phi}(\vec{k},t) + \ddot{\varphi}(\vec{k},t) + \xi(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{\xi}(\vec{k})e^{iw_2t}$ $h_{0i}(\vec{k},t) = ik_i\phi(\vec{k},t) + \dot{\alpha}_i(\vec{k},t) + \gamma_{2\,i}(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{\gamma}_{2\,i}(-\vec{k})e^{iw_2t}$ $h_{ij}(\vec{k},t) = k_ik_j\varphi(\vec{k},t) + ik_i\alpha_j(\vec{k},t) + ik_j\alpha_i(\vec{k},t) +$ $\quad + \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{w^2}\right)\left[\chi(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{\chi}(-\vec{k})e^{iw_2t}\right] +$ $\quad + h^{TT}_{ij}(\vec{k})e^{-iwt} + \bar{h}^{TT}_{ij}(-\vec{k})e^{iwt} + h^{TT}_{2\,ij}(\vec{k})e^{-iw_2t} + \bar{h}^{TT}_{2\,ij}(-\vec{k})e^{iw_2t}$

3.3 Los grados de libertad, las transformaciones de gauge y la energía

Una vez que tenemos parametrizado el espacio de fases covariante $\mathcal{S}(a,b,c)$ mediante las fórmulas que se recogen en la tabla de la página anterior, es una tarea sencilla, aunque ciertamente pesada, calcular la restricción de Ω sobre $\mathcal{S}(a,b,c)$. La diferencia funcional entre las soluciones para distintas elecciones de los parámetros a, b y c se traduce en la necesidad de considerar por separado cada uno de los casos que aparecen en dicha tabla.

Con el fin de presentar los resultados de manera ordenada, empezaremos fijando los convenios de notación para las distintas piezas que compondrán la forma simpléctica sobre el espacio de soluciones. Los paréntesis (s,m) hacen referencia al espín y la masa, aunque su justificación deberá esperar a la siguiente sección.

	Convenios para las Formas Simplécticas
$\Omega^{(2,0)}$	$\int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k}\, aiw\, \mathbb{d}\bar{h}_{ij}^{TT}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}h_{ij}^{TT}(\vec{k})$
$\Omega^{(2,m_2)}$	$\int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k} \Big[aiw_2\mathbb{d}\bar{h}_{2\,ij}^{TT}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}h_{2\,ij}^{TT}(\vec{k}) + \frac{2aiw^2w_2}{m_2^2}\mathbb{d}\bar{\gamma}_{2\,i}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\gamma_{2\,i}(\vec{k}) +$ $+\frac{3}{2}aiw_2\mathbb{d}\bar{\tau}_2(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\tau_2(\vec{k})\Big]\,.$
$\Omega^{(0,m_0)}$	$\int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k}\, \frac{3}{2}aiw_0\, \mathbb{d}\bar{\tau}_0(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\tau_0(\vec{k})$
$\Omega^{\star}$	$\int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k} \Big\{aiw_2\mathbb{d}\bar{h}_{2\,ij}^{TT}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}h_{2\,ij}^{TT}(\vec{k}) + \frac{aiw^2w_2}{m_2^2}\mathbb{d}\bar{\gamma}_{2\,i}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\gamma_{2\,i}(\vec{k}) +$ $+ciw^2w_2\Big[\mathbb{d}\bar{\chi}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\xi(\vec{k}) + \mathbb{d}\bar{\xi}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\chi(\vec{k})\Big]\Big\}$

Debido a que la Lagrangiana $\mathcal{L}$, y en consecuencia la forma simpléctica Ω, son invariantes bajo traslaciones, es posible obtener directamente de la forma simpléctica el Hamiltoniano del sistema. Como siempre, basta identificar H en la expresión $i_{V_T}\Omega = -\tau \mathrm{d}H$, donde V_T es un vector tangente a la órbita, en el espacio de fases covariante, generada por una traslación de parámetro τ, e $i_{V_T}\Omega$ indica la contracción de Ω con V_T. Por tanto, asociada a la tabla de convenios para formas simplécticas tenemos la correspondiente tabla de Hamiltonianos.

	`Convenios para los Hamiltonianos`
$H^{(2,0)}$	$\int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k}\, aw^2 \bar{h}^{TT}_{ij}(\vec{k}) h^{TT}_{ij}(\vec{k})$
$H^{(2,m_2)}$	$\int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k}\, \left[aw_2^2 \bar{h}^{TT}_{2\,ij}(\vec{k}) h^{TT}_{2\,ij}(\vec{k}) + \frac{2aw^2w_2^2}{m_2^2}\bar{\gamma}_{2\,i}(\vec{k})\gamma_{2\,i}(\vec{k}) + \frac{3}{2}aw_2^2\bar{\tau}_2(\vec{k})\tau_2(\vec{k})\right]$
$H^{(0,m_0)}$	$\int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k}\, \frac{3}{2}aw_0^2\bar{\tau}_0(\vec{k})\tau_0(\vec{k})$
$H^{\star}$	$\int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k}\, \Big\{aw_2^2 \bar{h}^{TT}_{2\,ij}(\vec{k}) h^{TT}_{2\,ij}(\vec{k}) + \frac{aw^2w_2^2}{m_2^2}\bar{\gamma}_{2\,i}(\vec{k})\gamma_{2\,i}(\vec{k}) +$ $+ cw^2w_2^2\left[\bar{\chi}(\vec{k})\xi(\vec{k}) + \bar{\xi}(\vec{k})\chi(\vec{k})\right]\Big\}$

Con estas definiciones, la discusión de los distintos casos que surgen al restringir Ω sobre las parametrizaciones de las soluciones de las ecuaciones de campo linealizadas, es como sigue:

- **Caso $b = c = 0$: Gravitación usual R**

  La forma simpléctica y la energía son respectivamente

$$\Omega_{\mathcal{S}} = \Omega^{(2,0)} \quad ; \quad H_{\mathcal{S}} = H^{(2,0)}\,.$$

Estas son justamente la forma simpléctica y la energía asociadas a la teoría de Fierz-Pauli que propaga, como veremos en la siguiente sección, un espín dos de masa nula (gravitón) de energía positiva (recuérdese que $a > 0$).

- **Caso** $b \neq 0$, $c = 0$**: Gravitación** $aR + bR^2$

  En este caso, la forma simpléctica y la energía tienen una contribución extra frente al caso de la gravitación usual:

  $$\Omega_{\mathcal{S}} = \Omega^{(2,0)} + \Omega^{(0,m_0)} \quad ; \quad H_{\mathcal{S}} = H^{(2,0)} + H^{(0,m_0)} \,.$$

  El nuevo modo que ahora se propaga corresponde a un escalar (espín cero) que contribuye positivamente a la energía, o sea de forma física.

- **Caso** $c \neq 0$**. Gravitación** $aR + bR^2 + cR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$

  Este caso está a su vez dividido en varios subcasos:

  - Cuando $c + 3b = 0$

    $$\Omega_{\mathcal{S}} = \Omega^{(2,0)} - \Omega^{(2,m_2)} \quad ; \quad H_{\mathcal{S}} = H^{(2,0)} - H^{(2,m_2)}$$

    de modo que se propaga un gravitón junto a un espín dos masivo cuya contribución a la energía es siempre negativa.

  - Cuando $c + 3b \neq 0$ y $c + 2b \neq 0$

    $$\Omega_{\mathcal{S}} = \Omega^{(2,0)} - \Omega^{(2,m_2)} + \Omega^{(0,m_0)} \quad ; \quad H_{\mathcal{S}} = H^{(2,0)} - H^{(2,m_2)} + H^{(0,m_0)}$$

    de manera que hay presentes un gravitón y un escalar físicos junto a un espín dos masivo, fantasma de Weyl.

  - Cuando $c + 2b = 0$ podemos escribir

    $$\Omega_{\mathcal{S}} = \Omega^{(2,0)} - \Omega^{\star} \quad ; \quad H_{\mathcal{S}} = H^{(2,0)} - H^{\star}$$

Si nos fijamos con un poco de cuidado, la relación $c+2b=0$ es equivalente a imponer que las masas del escalar y el espín dos sean iguales. Esta coincidencia ha hecho que por un lado ciertas manipulaciones del caso $m_0^2 \neq m_2^2$ en la resolución de las ecuaciones no estén ahora permitidas y por otro que se confundan las exponenciales e^{-iw_2t} y e^{-iw_0t}. Pese a ello, este caso describe el mismo número de grados de libertad y simetrías de gauge que el caso $c+3b \neq 0$ con $c+2b \neq 0$. Aunque $\Omega^\star$ no está escrita en función de variables canónicas, basta la redefinición

$$\chi = \frac{1}{2w}\sqrt{-\frac{3a}{c}}\,(\tau_0+\tau_2) \quad ; \quad \xi = \frac{1}{2w}\sqrt{-\frac{3a}{c}}\,(\tau_0-\tau_2)$$

para que tanto la forma simpléctica como la energía tengan la misma expresión que en el caso anterior.

Aunque la parametrización del espacio de fases covariante $\mathcal{S}$ depende de cuatro funciones arbitrarias del tiempo, $\phi(\vec{k},t)$, $\varphi(\vec{k},t)$ y $\alpha_i(\vec{k},t)$, la independencia de t de la forma simpléctica sobre el espacio de soluciones hace que estas funciones arbitrarias no puedan aparecer en $\Omega_{\mathcal{S}}$. Por tanto, las direcciones de $\mathcal{S}$ asociadas con $\phi(\vec{k},t)$, $\varphi(\vec{k},t)$ y $\alpha_i(\vec{k},t)$ describen simetrías de gauge. Atendiendo al modo en que estas cuatro funciones contribuyen a $h_{\mu\nu}$ es muy fácil ponerlas en correspondencia con las cuatro componentes de un campo vectorial $\Lambda_\mu(x)$:

$$\Lambda_0(\vec{k},t) = \phi(\vec{k},t) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}(\vec{k},t) \quad ; \quad \Lambda_i(\vec{k},t) = -\frac{ik_i}{2}\varphi(\vec{k},t) + \alpha_i(\vec{k},t)\,.$$

En esta escritura, la simetría de gauge para $h_{\mu\nu}$ (en cualquiera de los casos que hemos discutido) se debe a la posibilidad de poder sumar a cualquier solución de las ecuaciones de campo la combinación $\Lambda_{\mu,\nu}+\Lambda_{\nu,\mu}$, con $\Lambda_\mu(x)$ arbitraria, y obtener una nueva solución. Esta simetría de gauge es el reflejo lineal de la invariancia bajo difeomorfismos de la teoría completa.

3.4 Proyectores de espín

Los resultados que hemos obtenido hasta el momento se apoyan en teoremas elementales de geometría simpléctica. Como es habitual en cualquier disciplina, uno puede estar dispuesto a perder parte del rigor en favor de cálculos formales, que a cambio acorten considerablemente los razonamientos. Este es el caso de los métodos basados en proyectores de espín, de uso común en gravitación alto-derivativa. Estos proyectores son operadores pseudodiferenciales –involucran potencias negativas del D'Alembertiano– que debido a sus propiedades algebraicas (apéndice A), en particular a que definen sectores ortogonales, agilizan el cálculo de los propagadores en teorías escritas en términos de $h_{\mu\nu}$. Para los argumentos que siguen únicamente necesitamos dos de ellos, el proyector de espín dos $P^{(2)}$ y el proyector escalar $P^{(S)}$,

$$
\begin{aligned}
P^{(2)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} &:= \frac{1}{2}\left(\theta_{\mu\alpha}\theta_{\nu\beta}+\theta_{\mu\beta}\theta_{\nu\alpha}\right)-\frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}\,.\\
P^{(S)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} &:= \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}\,,
\end{aligned}
$$

definidos a través del operador

$$
\theta_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}\,.
$$

Con estas definiciones, $P^{(2)}$ y $P^{(S)}$ son formalmente proyectores ortogonales ya que satisfacen

$$
\begin{aligned}
&P^{(2)}_{\mu\nu\,\rho\sigma}P^{(2)\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} = P^{(2)}_{\mu\nu\,\alpha\beta}\,,\\
&P^{(S)}_{\mu\nu\,\rho\sigma}P^{(S)\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} = P^{(S)}_{\mu\nu\,\alpha\beta}\,,\\
&P^{(2)}_{\mu\nu\,\rho\sigma}P^{(S)\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} = P^{(S)}_{\mu\nu\,\rho\sigma}P^{(2)\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Haciendo uso conveniente de la integración por partes, podemos reescribir (3.2) en la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \mathcal{Q}^{\mu\nu\,\alpha\beta}(a,b,c) h_{\alpha\beta}\,,$$

con

$$\mathcal{Q}(a,b,c) = a\Box\left[\frac{1}{2}P^{(2)} - P^{(S)}\right] + 6b\Box^2 P^{(S)} + c\Box^2\left[\frac{1}{2}P^{(2)} + 2P^{(S)}\right]\,,$$

donde, a partir de ahora, omitiremos los índices en aquellos sitios donde no quepa confusión.

En esta escritura, el propagador del campo $h_{\mu\nu}$ se obtendría de la inversión de $\mathcal{Q}(a,b,c)$, pero debido a que estamos tratando una teoría de gauge[4] el operador $\mathcal{Q}$ no es invertible[5]. Ahora bien, si nos restringimos al subespacio sobre el que proyectan $P^{(2)}$ y $P^{(S)}$, al que llamaremos $2 \oplus S$, la inversión formal del núcleo diferencial $\mathcal{Q}$ sí es posible. Denotando por

$$\Delta(a,b,c) := \mathcal{Q}^{-1}(a,b,c)$$

a la inversa en dicho subespacio, tenemos las siguientes expresiones para Δ en función de los valores de a, b y c:

$$\begin{aligned}
&\Delta(a,0,0) =: \Delta_g = \frac{1}{a\Box}\left[2P^{(2)} - P^{(S)}\right]\,.\\
&\Delta(a,b,0) = \Delta_g + \frac{1}{a(\Box - a/(6b))}P^{(S)}\,,\ (b \neq 0)\,.\\
&\Delta(a,-c/3,c) = \Delta_g - \frac{2}{a(\Box + a/c)}P^{(2)}\,,\ (c \neq 0)\,.\\
&\Delta(a,b,c) = \Delta_g - \frac{2}{a(\Box + a/c)}P^{(2)} + \frac{1}{a(\Box - a/(2c+6b))}P^{(S)}\,,\ (c + 3b \neq 0)\,.
\end{aligned}$$

[4]Es directo comprobar que $P^{(2)}{}_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}\left(\Lambda_{\alpha,\beta} + \Lambda_{\beta,\alpha}\right) = 0$ y $P^{(S)}{}_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}\left(\Lambda_{\alpha,\beta} + \Lambda_{\beta,\alpha}\right) = 0$.

[5]La suma de $P^{(2)}$ y $P^{(S)}$ no es la identidad.

En esta formulación, al contrario que nos ocurría en la resolución de las ecuaciones de campo linealizadas, no ha sido necesario tratar por separado el caso $c+2b=0$. Este se obtiene sin problemas particularizando los parámetros en $\Delta(a,b,c)$, cuando $c+3b\neq 0$,

$$c+2b=0 \Rightarrow \Delta(a,-c/2,c)=\Delta_g-\frac{2}{a(\Box+a/c)}P^{(2)}+\frac{1}{a(\Box+a/c)}P^{(S)}\,.$$

Ahora, apoyándonos en que la gravitación usual describe dos grados de libertad físicos (energía positiva) –el gravitón de propagador Δ_g– podemos reobtener los resultados de la sección anterior sin más que leer los distintos propagadores. Así, $\Delta(a,b,0)$ es suma de un gravitón y un escalar de masa $m_0^2=a/6b$. El escalar contribuye de forma positiva a la energía debido a que ambos propagadores se suman. Por su parte $\Delta(a,-c/3,c)$ es el propagador del gravitón menos el de un espín dos con $m_2^2=-a/c$. El espín dos masivo es un fantasma de Weyl debido a que ambos propagadores aparecen restados. Por último $\Delta(a,b,c)$ es suma de un gravitón, un escalar de masa $m_0^2=a/2(c+3b)$ menos un espín dos de masa $m_2^2=-a/c$. El gravitón y el escalar son físicos mientras que el espín dos masivo es de Weyl (no físico).

Autoestados de espín

Para justificar completamente que las parametrizaciones obtenidas en la sección 3.2 describen los distintos sectores de espín a los que nos hemos referido en la sección 3.3 es necesario calcular los autoestados de los proyectores $P^{(2)}$ y $P^{(S)}$. Daremos sentido a las inversas del D'Alembertiano trabajando sobre autoestados de $\Box$ con autovalor $m^2\neq 0$. En el resto de la sección, todos los campos satisfarán la ecuación de Klein-Gordon

$$(\Box-m^2)f(\vec{x},t)=0\,,$$

de modo que en el espacio de momentos pueden parametrizarse de la forma

$$f(\vec{k},t) = f(\vec{k})e^{-iw_m t} + \bar{f}(-\vec{k})e^{iw_m t}\,,$$

donde $w_m = +\sqrt{w^2+m^2}$. Sobre este conjunto de autoestados, el operador $\theta_{\mu\nu}$ se convierte en el operador diferencial

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2}\,,$$

evitando así la ambigüedad en la definición de $P^{(2)}$ y $P^{(S)}$. Aunque en este punto sólo nos preocupan $P^{(2)}$ y $P^{(S)}$ los autoestados del resto de proyectores de espín vienen recogidos en el apéndice A.

Autoestados de $P^{(2)}$.

Caracterizaremos en primer lugar el subespacio invariante bajo $P^{(2)}$. Definiendo $h^{(2,m)}$ como aquellos estados tales que

$$P^{(2)\ \alpha\beta}_{\mu\nu} h^{(2,m)}_{\alpha\beta} = h^{(2,m)}_{\mu\nu}$$

es posible parametrizar este conjunto de vectores mediante

$$\begin{aligned}
h^{(2,m)}_{00}(\vec{k},t) &= -\frac{w^2}{m^2}\tau(\vec{k},t)\,,\\
h^{(2,m)}_{0i}(\vec{k},t) &= \frac{ik_i}{m^2}\dot{\tau}(\vec{k},t) + \frac{w^2}{w^2+m^2}\dot{\alpha}_i(\vec{k},t)\,,\\
h^{(2,m)}_{ij}(\vec{k},t) &= \frac{k_ik_j}{m^2w^2}\ddot{\tau}(\vec{k},t) + ik_i\alpha_j(\vec{k},t) + ik_j\alpha_i(\vec{k},t) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{w^2}\right)\tau(\vec{k},t) + h^{TT}_{ij}(\vec{k},t)\,.
\end{aligned}$$

Identificando las componentes ϕ y φ de la parametrización (3.5) en $h^{(2,m)}_{\mu\nu}$ podemos poner

$$h_{00} = 2\dot{\phi} + \ddot{\varphi} - \frac{m^2}{w^2}\tau\,.$$

Por tanto, los campos $h^{TT}_{2\,ij}$, $\gamma_{2\,i}$ y τ_2 que nos aparecieron en la sección 3.2 se combinan para propagar un espín dos masivo, tal como indicamos en la sección 3.3. Por su parte, cuando la masa del espín dos es nula (gravitón) únicamente las dos polarizaciones contenidas en h^{TT}_{ij} son necesarias.

Autoestados de $P^{(S)}$.

Denotaremos por $h^{(S,m)}_{\mu\nu}$ a los estados invariantes bajo $P^{(S)}$, definidos a través de la ecuación

$$P^{(S)}{}_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} h^{(S,m)}_{\alpha\beta} = h^{(S,m)}_{\mu\nu} \,.$$

Esta ecuación tiene como solución general el conjunto de campos de la forma

$$\begin{aligned}
h^{(S,m)}_{00}(\vec{k},t) &= \frac{w^2}{2m^2}\tau(\vec{k},t)\,, \\
h^{(S,m)}_{0i}(\vec{k},t) &= -\frac{ik_i}{2m^2}\dot{\tau}(\vec{k},t)\,, \\
h^{(S,m)}_{ij}(\vec{k},t) &= -\frac{k_i k_j}{2m^2 w^2}\ddot{\tau}(\vec{k},t) + \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{w^2}\right)\tau(\vec{k},t)\,.
\end{aligned}$$

Identificando las componentes ϕ y φ de la parametrización (3.5) en la ecuación anterior es directo comprobar que

$$h_{00} = 2\dot{\phi} + \ddot{\varphi} + \frac{m^2}{2w^2}\tau\,,$$

de donde se concluye que el campo τ_0, cuando está presente en las soluciones de las ecuaciones de campo, propaga un grado de libertad escalar.

3.5 Transformaciones de Legendre para la gravitación alto-derivativa

Cuando nos concentramos en la teoría completa

$$\mathcal{L}_{HD} \;=\; aR + bR^2 + cR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$$

la primera tentación es reducir el orden diferencial por medio de una transformada de Legendre definida a partir de $R_{\mu\nu}$ [24]. El problema al proceder de esta manera radica en que dicha transformación se vuelve singular para la combinación de parámetros $4b+c=0$ que, como hemos visto en las secciones anteriores, no se corresponde con ningún salto en el número de grados de libertad. Con el fin de no introducir singularidades superfluas debidas a la transformación de Legendre covariante es conveniente hacer explícitas las combinaciones de los parámetros que producen saltos en los grados de libertad. Esto se consigue sin más que escribir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{HD} &= aR + bR^2 + cR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{c}{3}R^2 - \frac{c}{3}R^2 \\ &= aR + \frac{3b+c}{3}R^2 + c\left(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2\right) .\end{aligned}$$

De esta manera es claro que la propagación de estados de espín 0 está asociada con los términos $R+R^2$ mientras que el espin 2 se debe a la combinación $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2$, que se corresponde (módulo divergencias) con el cuadrado del tensor de Weyl que se puede escribir en función del tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ en la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{HD} &= aR + \frac{3b+c}{3}R^2 + c\left[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{3}G^2\right] \\ &= aR + \frac{3b+c}{3}R^2 + c\,G_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) - \frac{1}{3}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\right]G_{\rho\sigma}\end{aligned}$$

donde el operador

$$Q^{\mu\nu\,\rho\sigma} := \frac{1}{2}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) - \frac{1}{3}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$$

es no singular.

Tratando a R y a $G_{\mu\nu}$ como objetos independientes (en el sentido de que contiene información independiente sobre las derivadas de $g_{\mu\nu}$) podemos definir dos transformaciones de Legendre independientes

$$\begin{aligned}
\pi &:= \frac{\partial \mathcal{L}_{HD}}{\partial R} = a + \frac{2}{3}(3b+c)R \\
\Pi^{\mu\nu} &:= \frac{\partial \mathcal{L}_{HD}}{\partial G_{\mu\nu}} = 2c\left[G^{\mu\nu} - \frac{1}{3}g^{\mu\nu}G\right] = 2c\, Q^{\mu\nu\,\rho\sigma}G_{\rho\sigma}\,,
\end{aligned}$$

ambas invertibles, siempre y cuando $c \neq 0$ y $3b + c \neq 0$, en la forma

$$\begin{aligned}
R &= \frac{3}{2(3b+c)}(\pi - a) \\
G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2c}\left[\frac{1}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\right]\Pi^{\rho\sigma}\,.
\end{aligned}$$

La Lagrangiana de Helmholtz asociada a la transformación de Legendre es

$$\mathcal{L}_H = R\pi - \frac{3}{4(3b+c)}(\pi - a)^2 + G_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} - \frac{1}{4c}(\Pi_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} - \Pi^2)\,.$$

Definiendo el campo escalar $\Phi := \pi - a$ podemos escribir

$$\mathcal{L}_H = aR + \Phi R - \frac{3}{4(3b+c)}\Phi^2 + G_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} - \frac{1}{4c}(\Pi_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} - \Pi^2)\,.$$

El proceso de diagonalización de los grados de libertad para la Lagrangiana de Helmholtz puede seguirse en [25] o bien en [24].

Capítulo 4

Modelos de gravitación R^2. Teoría fijada de gauge

Los resultados del capítulo anterior, al igual que los trabajos [23], [24], [25] allí citados, se refieren a las teorías de gravitación altoderivativas invariantes bajo difeomorfismos (aun no preparadas para la cuantización). Una primera exploración de los métodos de reducción de orden diferencial en presencia de términos de fijación de gauge fue realizada en [4] para el caso de vectores alto-derivativos. En este capítulo extenderemos el procedimiento, con ayuda de los resultados obtenidos en la sección 1.5 en el caso vectorial, al caso de la gravitación de cuarto orden diferencial.

Entre una multitud de estados de norma positiva y negativa, fantasmas dependientes e independientes del gauge, estados de masa nula y masivos, surgen los famosos "terceros fantasmas" (*third ghosts*). Estos fantasmas, olvidados en [15] y tenidos en cuenta de manera correcta desde [16], aparecieron por primera vez como determinantes funcionales en el contexto de la cuantización mediante integral de camino. Ahora, mediante los procedimientos de reducción de orden, nos aparecerán como los parientes tipo "poltergeist" de los habituales fantasmas de gauge.

En la sección 4.1 presentaremos nuestra teoría Lagrangiana de partida invariante bajo difeomorfismos e introduciremos un término de fijación de gauge muy general, que incluye a los más usados como casos particulares. Debido a que nuestro interés se centra en el cálculo de propagadores y en la tarea de identificar los grados de libertad, nos restringiremos principalmente al estudio de la parte cuadrática de la Lagrangiana. Las autointeracciones y las interacciones con otros campos de materia vendrán englobadas en un término de fuente que puede ser tratado perturbativamente. A continuación obtendremos la teoría linealizada completamente fijada de gauge. En la sección 4.2 presentaremos el procedimiento de reducción de orden diferencial que conduce a una teoría equivalente de segundo orden diagonalizada. La estructura de los propagadores y la identificación de los grados de libertad se realizará en la sección 4.3. La Lagrangiana de compensación de Faddeev-Popov será estudiada en la sección 4.4, en donde se llevará a cabo también una reducción del orden en el sector fermiónico. Prestaremos allí una particular atención a la identificación de los polos y al sorprendente mecanismo de cancelación de las contribuciones de los *loops* de fantasmas[1]. En relación con esto, realizaremos una discusión sobre las simetrías BRST involucradas. Los resultados obtenidos vienen resumidos y discutidos en las conclusiones.

Las definiciones de los proyectores de espín, las fórmulas relacionadas con éstos, una base de los operadores diferenciales locales junto con la notación y convenios utlizados vienen recogidos en el apéndice A, con el fin hacer el capítulo autocontenido. Ciertos cálculos secundarios que se refieren a condiciones de localidad sobre los parámetros de fijación de gauge y la reducción de orden diferencial del sector fermiónico alto-derivativo de Faddeev-Popov han sido incluidos en el apéndice C.

[1] Aunque no vamos a estudiar correcciones debidas a los *loops* de las distintas partículas que se propagan en la teoría, usaremos la nomenclatura usual de Teoría Cuántica de Campos para referirnos a los procesos de cancelación de grados de libertad de gauge a través del sector de Faddeev-Popov.

4.1 La Lagrangiana linealizada

Consideraremos la teoría genérica de gravitación

$$\mathcal{L}^{HD} = \mathcal{L}_{Dif} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{Materia} \quad ,$$

donde $\mathcal{L}_{Materia}$ es el acoplo con la materia,

$$\mathcal{L}_{Dif} = \sqrt{-g}\,[aR + bR^2 + cR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}]\,,$$

es la Lagragiana gravitatoria más general, invariante bajo difeomorfismos y de segundo orden en curvaturas (el cuadrado del tensor de Riemann no ha sido considerado ya que asumiremos que el epacio-tiempo 4D es topológicamente trivial y se satisface la identidad de Gauss-Bonnet), y

$$\mathcal{L}_{GF} = \sqrt{-g}\frac{1}{2}\chi^{\mu}[h]\mathcal{G}_{\mu\nu}\chi^{\nu}[h]\,, \tag{4.1}$$

donde

$$\begin{aligned}
\chi^{\mu}[h] &:= h^{\mu,\nu}{}_{\nu} - \lambda D^{\mu}h^{\nu}{}_{\nu}\,,\\
\mathcal{G}_{\mu\nu} &:= \xi_1 D^{\rho}D_{\rho}g_{\mu\nu} - \xi_2\frac{1}{2}D_{(\mu}D_{\nu)} + \xi_3 g_{\mu\nu} + \xi_4 R_{\mu\nu} + \xi_5 R g_{\mu\nu}\,,
\end{aligned}$$

es un término general de fijación de gauge que depende de seis parámetros λ, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 y contiene, genéricamente, tanto términos alto-derivativos como bajo-derivativos. Los términos de fijación de gauge utilizados en [15], [16], [17], [18], [19] pueden obtenerse particularizando los valores de dichos parámetros.

Con el fin de estudiar los grados de libertad que propaga la teoría extraeremos los términos cuadráticos en $h_{\mu\nu}$ de $\mathcal{L}^{HD}$. Eliminando derivadas totales, estos son

$$\mathcal{L}^{HD} = \mathcal{L}^{(2)}_{Dif} + \mathcal{L}^{(2)}_{GF} + \mathcal{L}_{Fuente} = \frac{1}{2}h^{\mu\nu}[\mathcal{Q}^{Dif}_{\mu\nu,\rho\sigma} + \mathcal{Q}^{GF}_{\mu\nu,\rho\sigma}]h^{\rho\sigma} + \mathcal{L}_{Fuente}\,. \tag{4.2}$$

El término de fuente $\mathcal{L}_{Fuente}$ incluye tanto a los términos de interacción con los campos de materia como a las autointeracciones de $h_{\mu\nu}$, todas ellas afectadas de la constante de Newton G_N. De aquí en adelante, los índices serán subidos y bajados con la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ y los omitiremos por simplicidad siempre y cuando no quepa ninguna ambigüedad.

El núcleo del operador diferencial correspondiente a la parte invariante bajo difeomorfismos es

$$\mathcal{Q}^{Dif} = a\Box\left[\frac{1}{2}P^{(2)} - P^{(S)}\right] + 6b\Box^2 P^{(S)} + c\Box^2\left[\frac{1}{2}P^{(2)} + 2P^{(S)}\right] . \tag{4.3}$$

La contribución del término de fijación de gauge

$$\mathcal{L}_{GF}^{(2)} = \frac{1}{2}(h^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} - \lambda\partial^\mu h^\alpha{}_\alpha)(\xi_1\Box\eta_{\mu\nu} - \xi_2\partial_\mu\partial_\nu + \xi_3\eta_{\mu\nu})(h^{\nu\beta}{}_{,\beta} - \lambda\partial^\nu h^\beta{}_\beta) \tag{4.4}$$

proporciona un núcleo diferencial

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{GF} \quad = \quad & -\Box\lambda^2\left[(\xi_1-\xi_2)\Box + \xi_3\right]\left(3P^{(S)} + P^{(W)} + P^{\{SW\}}\right) \\ & + \xi_2\Box^2 P^{(W)} - \Box\left[\xi_1\Box + \xi_3\right]\left(\frac{1}{2}P^{(1)} + P^{(W)}\right) \\ & + \lambda\Box\left[(\xi_1-\xi_2)\Box + \xi_3\right]\left(2P^{(W)} + P^{\{SW\}}\right) .\end{aligned}$$

Es posible reconocer en (4.4) la parte linealizada de $\chi^\mu[h]$ y la parte independiente de h de $\mathcal{G}_{\mu\nu}$, a la que nos referiremos como $\mathcal{G}^{(h)}$ en lo que sigue.

Así, el núcleo del operador diferencial alto-derivativo completo es

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} \quad = \quad & \mathcal{Q}^{Dif} + \mathcal{Q}^{GF} \\ = \quad & \frac{1}{2}\Box\left(c\Box + a\right)P^{(2)} - \frac{1}{2}\Box\left(\xi_1\Box + \xi_3\right)P^{(1)} \\ & + \Box\left[-a + 2(3b+c)\Box - 3\lambda^2\left((\xi_1-\xi_2)\Box + \xi_3\right)\right]P^{(S)} \\ & - (\lambda-1)^2\Box\left((\xi_1-\xi_2)\Box + \xi_3\right)P^{(W)} \\ & - \lambda(\lambda-1)\Box\left((\xi_1-\xi_2)\Box + \xi_3\right)P^{\{SW\}} .\end{aligned}$$

Descomponiendo $\mathcal{Q}$ en sus partes alto y bajo-derivativas, es decir

$$\mathcal{Q} = M\Box^2 + N\Box \,,$$

donde

$$\begin{aligned}
M &:= \frac{c}{2}P^{(2)} - \frac{1}{2}\xi_1 P^{(1)} \\
&\quad + \Big(2(3b+c) - 3\lambda^2(\xi_1 - \xi_2)\Big) P^{(S)} - (\lambda-1)^2(\xi_1-\xi_2)P^{(W)} \\
&\quad - \lambda(\lambda-1)(\xi_1-\xi_2)P^{\{SW\}} \\
N &:= \frac{1}{2}aP^{(2)} - \frac{1}{2}\xi_3 P^{(1)} \\
&\quad - \Big(a + 3\lambda^2\xi_3\Big) P^{(S)} - (\lambda-1)^2\xi_3 P^{(W)} - \lambda(\lambda-1)\xi_3 P^{\{SW\}} \quad ,
\end{aligned}$$

la ecuación (4.2) puede ser escrita como

$$\mathcal{L}^{HD} = \frac{1}{2}h\Box(M\Box + N)h + \mathcal{L}_{Fuente}\,. \tag{4.5}$$

Eliminado derivadas totales, podemos dar una forma más conveniente

$$\mathcal{L}^{HD}(h,\Box h) = \frac{1}{2}(\Box h)M(\Box h) + \frac{1}{2}hN(\Box h) + \mathcal{L}_{Fuente}\,. \tag{4.6}$$

La ecuación de Euler alto-derivativa toma la forma

$$\Box(M\Box + N)^{\mu\nu,\rho\sigma}h_{\rho\sigma} = T^{\mu\nu}\,, \tag{4.7}$$

donde $T^{\mu\nu} := -\delta\mathcal{L}_{Fuente}/\delta h_{\mu\nu}$.

4.2 La teoría de segundo orden equivalente

Con la intención de realizar una transformación de Legendre [24], [33] en nuestra Lagrangiana alto-derivativa, la forma de (4.6) sugiere trivialmente definir la variable conjugada

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}^{HD}}{\partial(\Box h_{\mu\nu})}\,. \tag{4.8}$$

Encontramos así que

$$\pi = M(\Box h) + \frac{1}{2}Nh + O(G_N)\,, \tag{4.9}$$

donde las contribuciones que vienen de las interacciones gravitatorias pueden tratarse perturbativamente en G_N , o bien pueden simplemente ignorarse para el estudio de los grados de libertad que se propagan.

Como debía ocurrir, (4.9) puede invertirse para dar

$$\Box h = M^{-1}\left[\pi - \frac{1}{2}Nh\right] =: F[h,\pi]\,. \tag{4.10}$$

Nótese que los operadores M y N son invertibles siempre y cuando los términos de fijación de gauge hayan sido introducidos. De otro modo proyectan sobre el subespacio $2 \oplus S$ siendo, en consecuencia, singulares.

La función "Hamiltoniana" covariante-Lorentz, asociada al método de Legendre es

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}[h,\pi] &= \pi F[h,\pi] - \mathcal{L}_{HD}[h, F[h,\pi]] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}Nh - \pi\right] M^{-1}\left[\frac{1}{2}Nh - \pi\right] - \mathcal{L}_{Fuente}\,.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento se vuelven, con esta definición, ecuaciones de tipo canónico

$$\Box h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \tag{4.11}$$

$$\Box \pi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h}\,. \tag{4.12}$$

El familiar signo negativo que cabría esperar en (4.12) está ausente debido a que la definición (4.8) involucra derivadas de segundo orden del campo h en lugar de las velocidades usuales [4]. Las ecuaciones de campo pueden también ser deducidas por medio de un principio variacional, a través de la Lagrangiana (ahora 2-derivativa) de Helmholtz

$$\mathcal{L}_H[h,\pi] = \pi\Box h - \mathcal{H}[h,\pi]\,. \tag{4.13}$$

De hecho, de (4.13) vemos que (4.11) es la ecuación de Euler para π y (4.12) es la de h. A partir de (4.11) –que no es otra cosa mas que la ecuación (4.10)– es posible eliminar π tal como viene definido en (4.9). Sustituyéndolo de vuelta en (4.12) se recupera (4.7), es decir las ecuaciones alto-derivativas originales.

La Lagrangiana (4.13) presenta una mezcla π-h. La diagonalización se realiza por medio de la definición de los nuevos campos $\tilde{h}$ y $\tilde{\pi}$:

$$\begin{aligned} h &= \tilde{h} + \tilde{\pi} \\ \pi &= \frac{N}{2}(\tilde{h} - \tilde{\pi}) \,, \end{aligned}$$

o recíprocamente

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= N^{-1}\left[\frac{1}{2}Nh + \pi\right] \\ \tilde{\pi} &= N^{-1}\left[\frac{1}{2}Nh - \pi\right] . \end{aligned}$$

En consecuencia $\mathcal{L}_H$ se transforma finalmente en la teoría bajo-derivativa deseada

$$\mathcal{L}_{LD} = \frac{1}{2}\tilde{h}N\Box\tilde{h} - \frac{1}{2}\tilde{\pi}(N\Box + NM^{-1}N)\tilde{\pi} + \mathcal{L}_{Fuente} \,, \tag{4.14}$$

donde

$$\begin{aligned} NM^{-1}N = & \frac{a^2}{2c}P^{(2)} - \frac{\xi_3^2}{2\xi_1}P^{(1)} \\ & + \frac{a^2(\xi_1 - \xi_2) - 3\lambda^2\xi_3^2 2(3b+c)}{2(3b+c)(\xi_1 - \xi_2)}P^{(S)} \\ & - \frac{(\lambda-1)^2\xi_3^2}{\xi_1 - \xi_2}P^{(W)} \\ & - \frac{\lambda(\lambda-1)\xi_3^2}{\xi_1 - \xi_2}P^{\{SW\}} \end{aligned}$$

La Lagrangiana (4.14) puede escribirse atendiendo a la dependencia de sus términos en los parámetros de gauge. Este escritura arroja mucha más luz sobre lo que discutiremos en el futuro

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LD} &= \frac{a}{2}\tilde{h}\left[\frac{1}{2}P^{(2)} - P^{(S)}\right]\Box\tilde{h} + \frac{1}{2}\chi[\tilde{h}]\mathcal{G}^{(\tilde{h})}\chi[\tilde{h}] \\ &- \frac{1}{2}\tilde{\pi}\left[a\left(\frac{1}{2}P^{(2)} - P^{(S)}\right)\Box + \frac{a^2}{2c}P^{(2)} + \frac{a^2}{2(3b+c)}P^{(S)}\right]\tilde{\pi} \\ &- \frac{1}{2}\chi[\tilde{\pi}]\mathcal{G}^{(\tilde{\pi})}\chi[\tilde{\pi}] + \mathcal{L}_{Fuente} \end{aligned} \tag{4.15}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(\tilde{h})}_{\alpha\beta} &= \xi_3\theta_{\alpha\beta} + \xi_3\omega_{\alpha\beta} = \xi_3\eta_{\alpha\beta} \\ \mathcal{G}^{(\tilde{\pi})}_{\alpha\beta} &= \xi_3\frac{\xi_1\Box + \xi_3}{\xi_1\Box}\theta_{\alpha\beta} + \xi_3\frac{(\xi_1-\xi_2)\Box + \xi_3}{(\xi_1-\xi_2)\Box}\omega_{\alpha\beta} \quad , \end{aligned}$$

y la forma de χ ha sido presentada en (4.4).

El significado físico es ahora evidente: Los campos $\tilde{h}$ y $\tilde{\pi}$ describen, respectivamente, los grados de libertad de masa nula y masivos de la teoría. Nótese que la componente invariante de gauge de $\tilde{\pi}$ reproduce la de la teoría de Fierz-Pauli [54].

La Lagrangiana (4.15) obtenida en el proceso es no-local para una elección arbitraria de los parámetros de gauge. Sin embargo, es posible obtener localidad para ciertas elecciones de los parámetros (apéndice C). Aún para estas elecciones, una característica molesta de (4.15) es que los subespacios escalares S y W aparecen mezclados siempre que el operador de trasferencia $P^{\{SW\}}$ este presente en N y $NM^{-1}N$.

4.3 Teoría lineal y propagadores

Para ahorrarnos complicaciones no esenciales debidas a la mezcla S-W, que oscurecen la identificación de grados de libertad que se propagan en la teoría, redefiniremos el campo $h_{\mu\nu}$ en la forma

$$\hat{h}_{\mu\nu} = (Q^{-1})^{\rho\sigma}_{\mu\nu}\, h_{\rho\sigma}$$

donde

$$Q(\lambda) \quad = \quad P^{(2)} + P^{(1)} + \frac{2}{3}P^{(W)} - \frac{2}{9}\frac{(\lambda-1)}{\lambda}P^{\{SW\}}$$

es invertible y se convierte en una matriz numérica para $\lambda = -2$, en concreto $Q(-2) = \bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}}/3$. Esta elección es obligada si no queremos contaminar el término de fuente con no-localidades. Por medio de Q, el operador $\mathcal{Q}$ se transforma en

$$\hat{\mathcal{Q}} = Q\mathcal{Q}Q = \hat{M}\Box^2 + \hat{N}\Box \quad ,$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{M} \quad &:= \quad \frac{c}{2}P^{(2)} - \frac{1}{2}\xi_1 P^{(1)} \\ &\quad + \frac{4}{27}\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}2(3b+c)P^{(W)} - \frac{4}{27}\frac{(\lambda-1)^4}{\lambda^2}(\xi_1-\xi_2)P^{(S)} \quad , \\ \hat{N} \quad &:= \quad \frac{1}{2}aP^{(2)} - \frac{4}{27}a\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}P^{(W)} - \frac{1}{2}\xi_3 P^{(1)} - \frac{4}{27}\frac{(\lambda-1)^4}{\lambda^2}\xi_3 P^{(S)}\end{aligned}$$

ya no involucran al operador $P^{\{SW\}}$. Por tanto, la ecuación (4.5) puede ser escrita como

$$\mathcal{L}_{HD} = \frac{1}{2}\hat{h}\Box(\hat{M}\Box + \hat{N})\hat{h} + \mathcal{L}_{Fuente}\,, \tag{4.16}$$

o bien, eliminando derivadas totales,

$$\mathcal{L}^{(2)}_{HD}[\hat{h}, \Box\hat{h}] = \frac{1}{2}(\Box\hat{h})\hat{M}(\Box\hat{h}) + \frac{1}{2}\hat{h}\hat{N}(\Box\hat{h}) + \hat{T}\hat{h}\,. \tag{4.17}$$

La interpretación de (4.17) en términos de partículas es ahora nuestra principal tarea. Por un lado, hemos partido de una teoría alto-derivativa (4.16) y, después de invertir las componentes de los proyectores, obtenemos el propagador cuártico

$$\begin{aligned}\Delta^{HD}[\hat{h}] \quad &= \quad \frac{2}{(c\Box + a)\Box}P^{(2)} + \frac{27}{4}\frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2[2(3b+c)\Box - a]\Box}P^{(W)} \\ &\quad - \frac{2}{(\xi_1\Box + \xi_3)\Box}P^{(1)} - \frac{27}{4}\frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^4[(\xi_1-\xi_2)\Box + \xi_3]\Box}P^{(S)} \quad .\end{aligned}$$

Por otro lado, los propagadores cuadráticos que surgen de la teoría bajo-derivativa (análoga a (4.14)) para los nuevos campos con *circumflejo* son

$$
\begin{aligned}
\Delta^{LD}[\tilde{\hat{h}}] &= \frac{2}{a\Box}P^{(2)} - \frac{27}{4}\frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2 a\Box}P^{(W)} \\
&\quad - \frac{2}{\xi_3\Box}P^{(1)} - \frac{27}{4}\frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^4\xi_3\Box}P^{(S)} \quad , \\
\Delta^{LD}[\tilde{\hat{\pi}}] &= -\frac{2c}{a(c\Box+a)}P^{(2)} + \frac{27}{4}\frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2}\frac{2(3b+c)}{a[2(3b+c)\Box-a]}P^{(W)} \\
&\quad + \frac{2}{\xi_3}\frac{\xi_1}{(\xi_1\Box+\xi_3)}P^{(1)} + \frac{27}{4}\frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^4\xi_3}\frac{(\xi_1-\xi_2)}{[(\xi_1-\xi_2)\Box+\xi_3]}P^{(S)} \,.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Como era de esperar, los propagadores cuadráticos bajo-derivativos se suman para reconstruir el propagador cuártico alto-derivativo, es decir

$$
\Delta^{HD}[\hat{h}] = \Delta^{LD}[\tilde{\hat{h}}] + \Delta^{LD}[\tilde{\hat{\pi}}] \tag{4.19}
$$

Nótese que si no hubiésemos realizado la transformación Q, los propagadores hubiesen sido

$$
\begin{aligned}
\Delta^{HD}[h] &= Q\Delta^{HD}[\hat{h}]Q \\
\Delta^{LD}[\tilde{h}] &= Q\Delta^{LD}[\tilde{\hat{h}}]Q \\
\Delta^{LD}[\tilde{\pi}] &= Q\Delta^{LD}[\tilde{\hat{\pi}}]Q \quad ,
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

con la mezcla $P^{\{SW\}}$ presente en todos ellos.

La cuenta de grados de libertad puede realizarse en (4.18). Debido a que estamos tratando con una teoría 4-derivativa (correctamente) fijada de gauge, todos los campos en $\hat{h}_{\mu\nu}$ se propagan y tenemos por tanto 20 grados de libertad (10 sin masa y 10 masivos). De acuerdo con la dimensionalidad de los distintos subespacios de espín, estos vienen distribuidos en grupos de 5, 3, 1 y 1 grados de libertad para los sectores de espín 2, 1, 0_S y 0_W respectivamente, sumando 10 grados del libertad para los campos sin masa y el mismo número para los masivos. Dentro del sector sin masa $\tilde{h}$, el subespacio de espín 2 contiene a los dos grados de libertad del gravitón junto a tres grados de libertad de gauge; los restantes cinco grados de libertad son también de gauge. El sector $\tilde{\pi}$ describe los cinco grados de libertad de un "poltergeist" de espín 2 y masa (cuadrado) $-a/c$ (sección anterior y [24], [54]), un escalar físico de masa $a/2(3b+c)$, tres terceros fantasmas de masas $-\xi_3/\xi_1$ dependientes de la elección de gauge y un tercer fantasma de masa $\xi_3/(\xi_2-\xi_1)$.

En ausencia de fijación de gauge, $\mathcal{Q}^{Dif}$ en (4.3) involucra solamente a los proyectores $P^{(2)}$ y $P^{(S)}$ por lo que su inversión es únicamente posible en el subespacio de espín $2 \oplus S$. En principio, este caso nos deja con sólo ocho grados de libertad en la teoría bajo-derivativa: un gravitón sin masa, un poltergeist masivo de espín 2 y el escalar físico. Esto es así en tanto en cuanto se eviten las relaciones críticas entre los parámetros a, b y c, ya comentadas en el capítulo anterior, que obligan a repetir ciertos pasos en el proceso de inversión de propagadores. En dichos casos algunos grados de libertad de la teoría colapsan dejándonos con menos de ocho grados de libertad. En [55] pueden encontrarse recetas para la cuenta rápida de grados de libertad en teorías de gauge. En la gravitación ordinaria de segundo orden, cada uno de los cuatro parámetros locales del grupo de gauge de la invariancia bajo difeomorfismos da cuenta de la eliminación de *dos* grados de libertad, dejándonos con los dos grados de libertad del gravitón de entre los diez contenidos en $h_{\mu\nu}$. En gravitación 4-derivativa, por el contrario, cada parámetro del grupo de gauge da cuenta de *tres* grados de libertad de manera que de los veinte iniciales nos vemos reducidos a los ocho ya citados anteriormente. El mecanismos sirve para ilustrar también el caso de la electrodinámica 4-derivativa [2], en donde se parte de ocho grados de libertad y la invariancia de gauge suprime tres de ellos, dejándonos con un fotón y un espín uno masivo.

Como se detalla en el apéndice A, la parte libre de la teoría bajo-derivativa transformada por Q puede considerarse local para elecciones particulares de los parámetros de gauge. Sin embargo , utilizando $Q(\lambda)$, para $\lambda = b/(4b+c)$, trasladamos la no-localidad al término de fuente, es decir a las interacciones. Esto podría haber sido evitado requiriendo que $\lambda = -2$, en cuyo caso Q se convierte en una matriz numérica, pero esto da lugar a una condición sobre los parámetros b y c de la teoría. Dejando aparte la interpretación de esta restricción, la identificación de grados de libertad que hemos realizado a partir de la Lagrangiana bajo-derivativa (4.7) no significa, de ningún modo, que hayamos obtenido una suma de teorías Lagrangianas independientes para cada una de las partículas masivas y de masa nula, de espín 2, 1, 0_S y 0_W, a pesar de que los subespacios de espín aparezcan bien separados. Esto no es posible, como ilustra por ejemplo el hecho [56] de que no existan teorías tensoriales (para $h_{\mu\nu}$) locales de segundo orden para campos de espín uno.

4.4 Términos de compensación de Faddeev-Popov

Como es habitual, el término de fijación de gauge (4.1) junto con la Lagrangiana (alto-derivativa) de Faddeev-Popov, que compensa al primero, pueden ser expresados como un coborde en la cohomología BRST generada por s, es decir

$$\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} = -s\left[\bar{C}^\alpha \mathcal{G}_{\alpha\beta}\chi^\beta[h] + \frac{1}{2}\bar{C}^\alpha \mathcal{G}_{\alpha\beta}\mathcal{B}^\beta\right] , \tag{4.21}$$

donde $\bar{C}$ son fantasmas anticonmutantes de Faddeev-Popov y $\mathcal{B}$ es un campo auxiliar conmutante.

Para el estudio de los propagadores de los campos $\bar{C}$ y $\mathcal{B}$, es suficiente considerar los objetos linealizados

$$\begin{aligned}\chi^{\beta}[h] &= \chi^{\beta\mu\nu}h_{\mu\nu} := (\eta^{\beta\mu}\partial^{\nu} - \lambda\eta^{\mu\nu}\partial^{\beta})h_{\mu\nu} \\ \mathcal{G}^{(h)}_{\alpha\beta} &:= \xi_1\eta_{\alpha\beta}\Box - \xi_2\partial_\alpha\partial_\beta + \xi_3\eta_{\alpha\beta} \\ &= (\xi_1\Box + \xi_3)\theta_{\alpha\beta} + [(\xi_1 - \xi_2)\Box + \xi_3]\,\omega_{\alpha\beta}\,,\end{aligned}$$

junto con la simetría BRST dada a través de las transformaciones (linealizadas) de Slavnov

$$\begin{aligned}&sh_{\mu\nu} = \mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha}C^{\alpha} \\ &sC^{\alpha} = 0 \\ &s\bar{C}^{\alpha} = \mathcal{B}^{\alpha} \\ &s\mathcal{B}^{\alpha} = 0 \quad ,\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{D}_{\mu\nu,\beta} := \eta_{\mu\beta}\partial_\nu + \eta_{\nu\beta}\partial_\mu$$

es el generador de la simetría de gauge. Mediante la diagonalización

$$\mathcal{B}^{\alpha} = B^{\alpha} - \chi^{\alpha}[h]$$

la parte lineal de (4.21) se transforma en

$$\mathcal{L}^{(2)}_{GF} + \mathcal{L}^{HD}_{FP} = \frac{1}{2}\chi^{\alpha}[h]\mathcal{G}^{(h)}_{\alpha\beta}\chi^{\beta}[h] + \bar{C}^{\alpha}\mathcal{G}_{\alpha\gamma}\chi^{\gamma\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu\nu,\beta}C^{\beta} - \frac{1}{2}B^{\alpha}\mathcal{G}^{(h)}_{\alpha\beta}B^{\beta} \quad ,$$

y tenemos

$$\begin{aligned}&sh_{\mu\nu} = \mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha}C^{\alpha} \\ &sC^{\alpha} = 0 \\ &s\bar{C}^{\alpha} = B^{\alpha} - \chi^{\alpha}[h] \\ &sB^{\alpha} = \chi^{\alpha\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu\nu,\beta}C^{\beta}\,.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Desde luego, las transformaciones (4.22) reflejan la simetría del grupo de gauge G, trivialmente abeliano, al que se reducen los difeomorfismos al considerar la teoría linealizada. En la teoría no-polinómica completa la existencia de acoplos entre los campos $h_{\mu\nu}$, C , $\bar{C}$ y B , y el hecho de que la simetría sea no-abeliana conducen a un conjunto de transformaciones s más complicadas en las que, por ejemplo, $sC^\alpha \neq 0$. Debe hacerse notar también que el uso de la transformación Q, introducida en la sección 4.3, no afecta de ningún modo a la forma de $\mathcal{L}_{FP}$, como puede comprobarse mediante el cálculo de los correspondientes operadores $\hat{\mathcal{D}} = Q^{-1}\mathcal{D}$ y $\hat{\chi}^{\alpha\mu\nu} = (\chi Q)^{\alpha\mu\nu}$.

El sector fermiónico de la Lagrangiana de Faddeev-Popov introducida al principio de la sección, es decir

$$\mathcal{L}^{HD}[\bar{C}C] = \bar{C}^\alpha \left[(\xi_1\Box + \xi_3)\Box\theta_{\alpha\beta} + 2(1-\lambda)((\xi_1 - \xi_2)\Box + \xi_3)\Box\omega_{\alpha\beta}\right] C^\beta \tag{4.23}$$

es alto-derivativo, mientras que, en contraste con las teorías ordinarias de segundo orden, ahora el campo bosónico auxiliar B *se propaga* de acuerdo con la Lagrangiana

$$\mathcal{L}[B] = -\frac{1}{2}B^\alpha \left[(\xi_1\Box + \xi_3)\theta_{\alpha\beta} + \left[(\xi_1 - \xi_2)\Box + \xi_3\right]\omega_{\alpha\beta}\right] B^\beta \tag{4.24}$$

que es ya bajo-derivativa y siempre local. Es posible aplicar también una reducción de orden a $\mathcal{L}^{HD}[\bar{C}C]$ (apéndice C), que nos lleva a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{LD}[\bar{E}E\bar{F}F] \;&=\; \bar{E}^\alpha \left(\xi_3\theta_{\alpha\beta} + 2(1-\lambda)\xi_3\omega_{\alpha\beta}\right)\Box E^\beta \\ &\quad - \bar{F}^\alpha \left(\frac{\xi_3}{\xi_1}(\xi_1\Box + \xi_3)\theta_{\alpha\beta} + \frac{2(1-\lambda)\xi_3}{\xi_1 - \xi_2}((\xi_1 - \xi_2)\Box + \xi_3)\omega_{\alpha\beta}\right) F^\beta ,\end{aligned} \tag{4.25}$$

donde $E^\alpha + F^\alpha = C^\alpha$ y $\bar{E}^\alpha + \bar{F}^\alpha = \bar{C}^\alpha$. La Lagrangiana (4.25) es local para la misma elección de parámetros (ver ecuaciones (C.1) y (C.2) del apéndice C) de gauge que hace que $\mathcal{L}_{LD}$ en (4.14) sea local.

En (4.24) leemos directamente

$$\Delta[B] = \frac{\theta}{\xi_1\Box + \xi_3} + \frac{\omega}{(\xi_1 - \xi_2)\Box + \xi_3}\,, \tag{4.26}$$

mientras que el propagador (orientado) alto-derivativo

$$\begin{aligned}\Delta^{HD}[\bar{C}C] &= \frac{\theta}{(\xi_1\Box + \xi_3)\Box} + \frac{\omega}{2(1-\lambda)}\frac{1}{((\xi_1 - \xi_2)\Box + \xi_3)\Box} \\ &= \frac{\theta}{\xi_3}\left(\frac{1}{\Box} - \frac{\xi_1}{\xi_1\Box + \xi_3}\right) + \frac{\omega}{2(1-\lambda)\xi_3}\left(\frac{1}{\Box} - \frac{\xi_1 - \xi_2}{(\xi_1 - \xi_2)\Box + \xi_3}\right)\end{aligned}$$

que se obtiene de (4.23) se descompone en la suma de propagadores bajo-derivativos (también orientados)

$$\Delta[\bar{E}E] = \frac{\theta}{\xi_3\Box} + \frac{\omega}{2(1-\lambda)\xi_3\Box} \tag{4.27}$$

$$\Delta[\bar{F}F] = -\frac{\xi_1}{\xi_3(\xi_1\Box + \xi_3)}\theta - \frac{(\xi_1 - \xi_2)}{2(1-\lambda)\xi_3((\xi_1 - \xi_2)\Box + \xi_3)}\omega\,, \tag{4.28}$$

que pueden ser también calculados mediante (4.25).

En (4.27) contamos cuatro fantasmas *fermiónicos* de Faddeev-Popov E_μ y cuatro $\bar{E}_\mu$, todos ellos con polos de masa nula, que nos dan las ocho contribuciones *negativas* de *loop* que sirven para compensar las de los ocho fantasmas de gauge de masa nula citados en la sección 4.3. La compensación del tercer fantasma contiene peculiaridades no triviales, que son características de las teorías de gauge alto-derivativas. De (4.28) se tiene que los fantasmas *fermiónicos* F y $\bar{F}$ proporcionan seis contribuciones de *loop negativas* , con polos de propagador en $-\xi_3/\xi_1$ y dos en $\xi_3/(\xi_2 - \xi_1)$. Esto compensa en exceso a los (tres más uno) terceros fantasmas. La salvación viene del nuevo fantasma *bosónico* de Faddeev-Popov B, que se propaga según (4.26),: nos da tres contribuciones *positivas* con polos en $-\xi_3/\xi_1$ y una en $\xi_3/(\xi_2 - \xi_1)$, cuadrando así completamente el proceso de cancelación de fantasmas de gauge.

Este ajuste entre las masa de los fantasmas es consecuencia de las interrelaciones existentes entre el procedimiento de reducción de orden diferencial y los procedimientos BRST. La relación maestra es

$$\mathcal{G}^{(h)^{-1}} = \mathcal{G}^{(\tilde{h})^{-1}} - \mathcal{G}^{(\tilde{\pi})^{-1}}, \tag{4.29}$$

donde los polos masivos de los terceros fantasmas estan contenidos en $\mathcal{G}^{(h)^{-1}}$ y $\mathcal{G}^{(\tilde{\pi})^{-1}}$, incluyendo este último también modos con masas cero. Para ver esto es útil definir el operador diferencial

$$Z^{\alpha}_{\beta} := \chi^{\alpha\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu\nu,\beta} = \Box\left[\theta^{\alpha}_{\beta} + 2(1-\lambda)\omega^{\alpha}_{\beta}\right] ,$$

junto con los núcleos diferenciales

$$K^{(i)}_{\alpha\beta} := \mathcal{G}^{(i)}_{\alpha\gamma} Z^{\gamma}_{\beta} \qquad\qquad (i = h, \tilde{h}, \tilde{\pi}) \tag{4.30}$$

que aparecen en las Lagrangianas de Faddeev-Popov anteriores y pueden leerse en (4.23) y (4.25). Los polos de los fantasmas de gauge de masa nula se hallan en Z^{-1} mientras que el operador $\mathcal{G}^{(\tilde{h})^{-1}}$ no tiene polos. De (4.29) y (4.30) se sigue que

$$K^{(h)^{-1}} = K^{(\tilde{h})^{-1}} - K^{(\tilde{\pi})^{-1}}$$

que puede leerse como $\Delta^{HD}[\bar{C}C] = \Delta[\bar{E}E] + \Delta[\bar{F}F]$. Así los campos E y los campos F heredan tanto los polos de masa nula como los masivos. Por otro lado $\Delta[B] = -\mathcal{G}^{(h)^{-1}}$, de manera que también el campo bosónico B posee los mismos polos masivos.

Las simetrías de $\mathcal{L}^{LD}_{GF} + \mathcal{L}^{LD}_{FP}$ son también no triviales. La simetría de la parte invariante de la teoría alto-derivativa bajo el grupo de variaciones de gauge G

$$\delta h_{\mu\nu} = \mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha}\,\varepsilon^{\alpha} \quad ,$$

la hereda la teoría bajo-derivativa (4.6) por medio de las variaciones

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{h}_{\mu\nu} &= \left[\bar{\eta}^{\rho\sigma}_{\mu\nu} + \Box(N^{-1}M)^{\rho\sigma}_{\mu\nu}\right]\mathcal{D}_{\rho\sigma,\alpha}\,\varepsilon^{\alpha} \\
&= \left[\frac{\xi_1\Box+\xi_3}{\xi_3}P^{(1)\rho\sigma}_{\mu\nu} + \frac{(\xi_1-\xi_2)\Box+\xi_3}{\xi_3}P^{(W)\rho\sigma}_{\mu\nu}\right]\mathcal{D}_{\rho\sigma,\alpha}\,\varepsilon^{\alpha}\,, \qquad (4.31)\\
\delta\tilde{\pi}_{\mu\nu} &= -\left[\Box(N^{-1}M)^{\rho\sigma}_{\mu\nu}\right]\mathcal{D}_{\rho\sigma,\alpha}\,\varepsilon^{\alpha} \\
&= -\left[\frac{\xi_1\Box}{\xi_3}P^{(1)\rho\sigma}_{\mu\nu} + \frac{(\xi_1-\xi_2)\Box}{\xi_3}P^{(W)\rho\sigma}_{\mu\nu}\right]\mathcal{D}_{\rho\sigma,\alpha}\,\varepsilon^{\alpha}\,,
\end{aligned}$$

ambas dependientes del mismo conjunto de parámetros de gauge $\varepsilon^{\alpha}(x)$. Es posible comprobar que $\delta\tilde{h}_{\mu\nu} + \delta\tilde{\pi}_{\mu\nu} = \delta h_{\mu\nu}$. Sin embargo, la parte invariante *libre* de la teoría bajo-derivativa (4.7) exhibe un grupo de gauge mayor, es decir los campos $\tilde{h}$ y $\tilde{\pi}$ pueden variarse de manera independiente

$$\bar{\delta}\tilde{h}_{\mu\nu} = \mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha}\,\varepsilon'^{\alpha}\,, \qquad (4.32)$$

$$\bar{\bar{\delta}}\tilde{\pi}_{\mu\nu} = \mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha}\,\varepsilon''^{\alpha}\,, \qquad (4.33)$$

duplicando de esta forma el número de parámetros de gauge, con el grupo de simetría original como un subgrupo de tipo diagonal $G_1 \subset G \times G$, isomorfo a G [4]. Podemos considerar ahora las Lagrangianas

$$\mathcal{L}^{LD}_{GF}[\tilde{h}] = \frac{1}{2}\chi[\tilde{h}]\mathcal{G}^{(\tilde{h})}\chi[\tilde{h}]$$

y

$$\mathcal{L}^{LD}_{GF}[\tilde{\pi}] = -\frac{1}{2}\chi[\tilde{\pi}]\mathcal{G}^{(\tilde{\pi})}\chi[\tilde{\pi}]\,,$$

que aparecen en (4.15), como fijaciones de gauge separadas para las simetrías (4.32) y (4.33) respectivamente, y preguntarnos qué ocurre con el esquema BRST.

Las transformaciones BRST separadas serían

$$\begin{aligned} s\tilde{h}_{\mu\nu} &= \mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha}E^{\alpha} & s\tilde{\pi}_{\mu\nu} &= \mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha}F^{\alpha} \\ sE^{\alpha} &= 0 & sF^{\alpha} &= 0 \\ s\bar{E}^{\alpha} &= B'^{\alpha} - \chi^{\alpha}[\tilde{h}] & s\bar{F}^{\alpha} &= B''^{\alpha} - \chi^{\alpha}[\tilde{\pi}] \\ sB'^{\alpha} &= \chi^{\alpha\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu\nu,\beta}E^{\beta} & sB''^{\alpha} &= \chi^{\alpha\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu\nu,\beta}F^{\beta}\,, \end{aligned} \tag{4.34}$$

lo que nos lleva a escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}^{\star}_{FP} \;&=\; -s\left[\bar{E}^{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{h})}_{\alpha\beta}\chi^{\beta}[\tilde{h}] + \frac{1}{2}\bar{E}^{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{h})}_{\alpha\beta}\mathcal{B}'^{\beta}\right] \qquad (4.35) \\ &\quad + s\left[\bar{F}^{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{\pi})}_{\alpha\beta}\chi^{\beta}[\tilde{\pi}] + \frac{1}{2}\bar{F}^{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{\pi})}_{\alpha\beta}\mathcal{B}''^{\beta}\right] \\ &=\; \frac{1}{2}\chi^{\alpha}[\tilde{h}]\mathcal{G}^{(\tilde{h})}_{\alpha\beta}\chi^{\beta}[\tilde{h}] - \frac{1}{2}\chi^{\alpha}[\tilde{\pi}]\mathcal{G}^{(\tilde{\pi})}_{\alpha\beta}\chi^{\beta}[\tilde{\pi}] \\ &\quad + \bar{E}^{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{h})}_{\alpha\rho}\chi^{\rho\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu\nu,\beta}E^{\beta} - \bar{F}^{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{\pi})}_{\alpha\rho}\chi^{\rho\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu\nu,\beta}F^{\beta} \qquad (4.36) \\ &\quad - \frac{1}{2}B'^{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{h})}_{\alpha\beta}B'^{\beta} + \frac{1}{2}B''^{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{\pi})}_{\alpha\beta}B''^{\beta} \end{aligned}$$

Así (4.25) coincide con el sector fermiónico de (4.36).

Las ecuaciones (4.34) definen dos cohomologías $\{\bar{V}; s\}$ y $\{\bar{\bar{V}}; s\}$, sobre espacios cohomológicos que denotaremos formalmente como $\bar{V} := \{\tilde{h}, E, \bar{E}, B'\}$ y $\bar{\bar{V}} := \{\tilde{\pi}, F, \bar{F}, B''\}$ respectivamente, siendo ambos copia del espacio original $V := \{h, C, \bar{C}, B\}$ donde el operador de coborde s viene definido en (4.22). El polinomio (4.35) es por tanto una co-cadena exacta en la cohomología $\{\bar{V}; s\} \oplus \{\bar{\bar{V}}; s\} := \{\bar{V} \oplus \bar{\bar{V}}; s \oplus s\}$.

La cohomología característica de la teoría alto-derivativa aparece como una subcohomología $\{V_1; s_1\}$ de la suma directa anterior. El subespacio $V_1 \subset \bar{V} \oplus \bar{\bar{V}}$ está definido a través de

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\mu\nu} &= \mathcal{O}'^{\rho\sigma}_{\mu\nu}h_{\rho\sigma} & \tilde{\pi}_{\mu\nu} &= \mathcal{O}''^{\rho\sigma}_{\mu\nu}h_{\rho\sigma} \\ E^{\alpha} &= \mathcal{O}'^{\alpha}_{\beta}C^{\beta} & F^{\alpha} &= \mathcal{O}''^{\alpha}_{\beta}C^{\beta} \\ \bar{E}^{\alpha} &= \mathcal{O}'^{\alpha}_{\beta}\bar{C}^{\beta} & \bar{F}^{\alpha} &= \mathcal{O}''^{\alpha}_{\beta}\bar{C}^{\beta} \\ B'^{\alpha} &= \mathcal{O}'^{\alpha}_{\beta}B^{\beta} & B''^{\alpha} &= \mathcal{O}''^{\alpha}_{\beta}B^{\beta} \quad , \end{aligned} \tag{4.37}$$

donde, al igual que ocurría en los modelos vectoriales tratados en 1.5, los operadores

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}'^{\rho\sigma}_{\mu\nu} &:= \bar{\eta}^{\rho\sigma}_{\mu\nu} + \Box(N^{-1}M)^{\rho\sigma}_{\mu\nu} && (4.38)\\
\mathcal{O}''^{\rho\sigma}_{\mu\nu} &:= -\Box(N^{-1}M)^{\rho\sigma}_{\mu\nu} && (4.39)\\
\mathcal{O}'^{\alpha}_{\beta} &:= \frac{\xi_1\Box + \xi_3}{\xi_3}\theta^{\alpha}_{\beta} + \frac{(\xi_1-\xi_2)\Box + \xi_3}{\xi_3}\omega^{\alpha}_{\beta} && (4.40)\\
\mathcal{O}''^{\alpha}_{\beta} &:= -\left[\frac{\xi_1\Box}{\xi_3}\theta^{\alpha}_{\beta} + \frac{(\xi_1-\xi_2)\Box}{\xi_3}\omega^{\alpha}_{\beta}\right] && (4.41)
\end{aligned}$$

son operadores lineales invertibles que satisfacen $\mathcal{O}' + \mathcal{O}'' = 1$, y s_1 es la restricción a V_1 de $s \oplus s$. Por tanto esta cohomología no es más que la original $\{V; s\}$ de la teoría altoderivativa, debido a que (4.37) define un isomorfismo $V \xrightarrow{\imath_1} V_1$ por el que s_1 se transforma en s , esto es

$$\begin{aligned}
s\tilde{h}_{\mu\nu} + s\tilde{\pi}_{\mu\nu} &= sh_{\mu\nu}\\
sE^{\alpha} + sF^{\alpha} &= sC^{\alpha}\\
s\bar{E}^{\alpha} + s\bar{F}^{\alpha} &= s\bar{C}^{\alpha}\\
sB'^{\alpha} + sB''^{\alpha} &= sB^{\alpha} \quad ,
\end{aligned}$$

como consecuencia de (4.37) y (4.38)-(4.41). En otras palabras $\imath_1^{-1} \circ s \oplus s \circ \imath_1 = s$. Además, hemos recuperado la Lagrangiana (4.24) para B, es decir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\star}[B'B''] &= -\frac{1}{2}B'^{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{h})}_{\alpha\beta}B'^{\beta} + \frac{1}{2}B''^{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{\pi})}_{\alpha\beta}B''^{\beta}\\
&= -\frac{1}{2}B^{\alpha}\mathcal{O}'^{\gamma}_{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{h})}_{\gamma\rho}\mathcal{O}'^{\rho}_{\beta}B^{\beta} + \frac{1}{2}B^{\alpha}\mathcal{O}''^{\gamma}_{\alpha}\mathcal{G}^{(\tilde{\pi})}_{\gamma\rho}\mathcal{O}''^{\rho}_{\beta}B^{\beta}\\
&= -\frac{1}{2}B^{\alpha}\mathcal{G}^{(h)}_{\alpha\beta}B^{\beta} = \mathcal{L}[B]
\end{aligned}$$

El subgrupo $G_1 \subset G \times G$, asociado a $\{V_1; s_1\}$ e isomorfo a G, se obtiene tomando los ε' y ε'' como funciones de los cuatro parámetros ε por medio de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha}\,\varepsilon'^{\alpha} &= \mathcal{O}'^{\rho\sigma}_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\rho\sigma,\alpha}\,\varepsilon^{\alpha}\\
\mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha}\,\varepsilon''^{\alpha} &= \mathcal{O}''^{\rho\sigma}_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\rho\sigma,\alpha}\,\varepsilon^{\alpha} \quad .
\end{aligned}$$

Estas se deducen imponiendo las relaciones que surgen de (4.31) sobre las variaciones, de otro modo independientes, (4.32) y (4.33), dando

$$
\begin{aligned}
\varepsilon'^{\alpha} &= \mathcal{O}'^{\alpha}_{\beta}\varepsilon^{\beta} \\
\varepsilon''^{\alpha} &= \mathcal{O}''^{\alpha}_{\beta}\varepsilon^{\beta} \quad ,
\end{aligned}
$$

de donde $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$. El grupo G_1 es, por definición, una simetría de la Lagrangiana no fijada de gauge (y también por separado de los términos de interacción) debido a que se tiene $\bar{\delta}\tilde{h}_{\mu\nu} + \bar{\bar{\delta}}\tilde{\pi}_{\mu\nu} = \delta h_{\mu\nu}$, mientras que $G \times G$ está roto por los términos de interacción.

Conclusiones

La aplicación conjunta de la transformada de Legendre y de las técnicas simplécticas covariantes nos ha permitido tratar, con toda generalidad, los procedimientos de reducción de orden diferencial en teorías Lagrangianas covariantes alto-derivativas libres escritas en términos de formas diferenciales y la posterior identificación de los modos que se propagan en la teoría bajo-derivativa equivalente. En particular, los razonamientos sobre el espacio de fases covariante de dichas teorías son la pieza clave a la hora de diagonalizar los grados de libertad en el caso genérico N-derivativo, venciendo así las limitaciones existentes en los intentos previos [33], [32] y [34].

Como procedimiento de reducción de orden diferencial alternativo, las técnicas basadas en multiplicadores de Lagrange, combinadas también con razonamientos sobre el espacio de fases covariante, presentan ventajas teóricas en cuanto a que no es necesario tratar por separado las teorías N-derivativas pares e impares.

Los modelos alto-derivativos escalares que hemos considerado aparecen, entre otros ejemplos, en teorías (linealizadas) de multi-inflación [46] y en regularizaciones del modelo de Higgs [5]. Los modelos para 1-formas contienen, como caso particular, al modelo de la electrodinámica generalizada de Podolsky [1], [2], así como a la parte lineal de los modelos propuestos como teorías efectivas para explicar el confinamiento en QCD [50]. Hemos visto además como en las versiones no abelianas el procedimiento de reducción de orden diferencial conduce a teorías bajo-derivativas cuyas partes libres quedan diagonalizadas aunque presentan interacciones cúbicas y cuárticas.

El tercer capítulo ha sido reservado a la gravitación alto-derivativa invariante bajo difeomorfismos. En concreto, utilizando técnicas covariantes, hemos identificado tanto los grados de libertad de dichas teorías como sus contribuciones a la energía quedando así evidente el caracter físico (contribuciones positivas) o de fantasma de Weyl (contribuciones negativas) de los modos que se propagan. Por su parte, las técnicas basadas en el uso de proyectores de espín permiten reobtener las mismas conclusiones mediante cálculos ciertamente más sencillos.

El cruce entre las teorías de gauge y las teorías de campo de alto orden diferencial da lugar a una considerable diversidad de estados de tipo partícula, los cuales están escondidos en las variables de campo originales. En el caso de la gravitación tensorial 4-derivativa estudiada en el capítulo cuarto, la duplicación de las condiciones de Cauchy para las ecuaciones de movimiento (de cuarto orden) se traduce en una duplicación del número de grados de libertad efectivos de tipo partícula que obedecen ecuaciones diferenciales de segundo orden. Estas describen estados físicos (norma positiva en el espacio de Fock) junto a una proliferación de estados fantasmagóricos tanto de masa nula como masivos, los cuales son no físicos debido a su norma negativa (poltergeist o fantasmas de Weyl) y/o dependencia de gauge (fantasmas de gauge). Mas allá del interés metodológico, este análisis proporciona una ampliación del contexto para las teorías de gauge tradicionales y la simetría BRST de relevancia física, que a la vez ilumina la naturaleza de ciertos estados encontrados en algunos trabajos previos sobre gravitación alto-derivativa.

Es particularmente interesante el estudio de la gravitación 4-derivativa debido a que tradicionalmente el énfasis se ha concedido a sus aplicaciones, pasando por alto ciertos detalles de su estructura. Entre los estados de tipo partícula en la teoría fijada de gauge, existen estados físicos (un gravitón de masa nula y un escalar reminiscente del campo de Brans-Dicke), un fantasma de Weyl masivo y de espín dos, independiente de gauge, y dos familias de campos dependientes de gauge: los habituales fantasmas de gauge de masa nula y el "novedoso" tercer fantasma. Este escurridizo tercer fantasma apareció por primera vez en la exponenciación del determinante funcional del operador diferencial $\mathcal{G}^{(h)}$ en las integrales de camino.

En presencia de términos de fijación de gauge (generalmente alto-derivativos) y la correspondiente Lagrangiana de compensación de Faddeev-Popov, el procedimiento de reducción de orden revela características notables de la simetría BRST subyacente asociada al grupo de gauge G, de cuatro parámetros, correspondiente a los difeomorfismos infinitesimales. En paralelo con la duplicación de campos, existe una duplicación en la simetría de gauge de la parte *libre* de la teoría equivalente bajo-derivativa (de segundo orden). Dentro de esta simetría mayor $G\times G$, tanto los términos de interacción como la consistencia del álgebra BRST seleccionan un subgrupo de tipo diagonal G_1, isomorfo a G, como la única simetría de la teoría completa bajo-derivativa, en concordancia con el hecho de que los difeomorfismos son la única simetría de la teoría alto-derivativa. Sin embargo, restringiéndonos a la parte libre de la teoría bajo-derivativa y considerando la simetría $G \times G$, su parte dependiente de gauge puede ser considerada como suma de fijaciones de gauge independientes para ambos factores del grupo. Los campos no físicos (en cuanto a su dependencia de gauge) introducidos de esta forma se interpretan como fantasmas de gauge, de masa nula para el primer factor del grupo y masivos para el segundo, proporcionándonos una mejor compresión del tercer fantasma. Además, la simetría por separado de las partes independientes de gauge del sector físico y de poltergeist de la teoría bajo-derivativa ilustra también cómo los términos cinéticos reproducen la estructura de Fierz-Pauli tanto en el caso sin masa como en el masivo, describiendo así campos de espín dos.

En correspondencia con la aparición de una nueva clase de fantasmas de gauge masivos, la Lagrangiana de Faddeev-Popov contiene también un mayor número de campos que se propagan. Estos vienen de la duplicación alto-derivativa de los campos fermiónicos anticonmutantes de Faddeev-Popov y de los campos bosónicos, los cuales son puramente artificios auxiliares que se desacoplan en las teorías 2-derivativas y que ahora se propagan y se acoplan a los campos dependientes de gauge. Las contribuciones negativas de los fermiones masivos de Faddeev-Popov producen una contribución que es el doble de la necesaria y vienen compensadas por las de los terceros fantasmas, y es justamente esta contribución positiva de los campos bosónicos de Faddeev-Popov la que produce el balance exacto. Este sorprendente mecanismo de compensación, peculiar de las teorías de gauge alto-derivativas y fácilmente extrapolable a teorías de orden superior a 4-derivativo, ilustra muy bien la potencia y riqueza de las técnicas BRST. Desde luego, comprobar la cancelación exacta de las contribuciones de los *loops* de gauge requiere la consideración de los residuos concretos de los propagadores y de las constantes de acoplo de los vértices que surgen de la teoría completa no-polinómica, una tarea más allá de los propósitos de este trabajo.

En cualquier caso es necesario hacer hincapié en que los fantasmas de Weyl de espín dos masivos, heredados de la teoría alto-derivativa invariante bajo difeomorfismos, son espectadores durante todo el mecanismo de cancelación BRST y desafortunadamente sobreviven a él al menos en la teoría 4-derivativa. Potencias R^3 en curvaturas y superiores vienen de la teoría de cuerdas [12], pero no contribuyen a los propagadores (teoría linealizada) como ha sido apuntado en la introducción. Sin embargo, términos de la forma $R\,\Box^n R$ se generan en Teoría Cuántica de Campos en espacios curvos [57] y deben por tanto estar presentes en cualquier teoría efectiva de gravitación con materia. Uno puede especular entonces sobre si las generaciones de poltergeists, que debieran surgir en una teoría completa de este tipo, se cancelan entre sí de algún modo (aunque ciertamente no en teoría de perturbaciones truncada a orden derivativo finito).

Es necesario un último comentario sobre la localidad. Partiendo de una teoría local alto-derivativa, el procedimiento de reducción de orden diferencial nos conduce a una teoría 2-derivativa equivalente. Para teorías escalares, la equivalente bajo-derivativa es directamente local (primer capítulo). En teorías vectoriales de gauge existe siempre una elección de los parámetros para la cual la teoría es local (sección 1.5 y [4]). Para campos tensoriales, el ejemplo que hemos estudiado en el capítulo 4 (sección 4.3), nos dice que la obtención de una teoría bajo-derivativa equivalente que sea suma de Lagrangianas libres para los diferentes estados de espín, no es compatible con la localidad, aunque es posible acercarse a este propósito a través de una elección apropiada de los parámetros. Esta obstrucción está relacionada con la superior complejidad de la estructura de ligaduras de las teorías de campos tensoriales, tal como la responsable de la imposibilidad de tener una teoría tensorial local y de segundo orden diferencial para campos de espín uno [56].

Los resultados originales de la investigación que se describe en la presente memoría se hallan recogidos en gran parte en las publicaciones referenciadas en [35], [39] y [40].

Apéndice A. Proyectores de espín

En los años sesenta, R. J. Rivers y K. J. Barnes [42] desarrollaron el formalismo de proyectores de espín en el marco de las teorías de campos tensoriales de dos índices. Este formalismo es de especial utilidad a la hora de calcular propagadores. En particular, nosotros necesitaremos hacer uso de la formulación de Rivers sobre tensores simétricos $h_{\mu\nu}$. En esta situación, es bien conocido que $h_{\mu\nu}(x)$ se puede descomponer como suma de representaciones irreducibles de espín en la forma $2 \oplus 1 \oplus S \oplus W$, donde 2 índica la representación irreducible de espín dos, 1 la de espín uno y tanto S como W son escalares (espín cero). Cada una de las componentes irreducibles puede seleccionarse a través del correspondiente proyector de espín. En cuatro dimensiones espaciotemporales estos proyectores tienen la forma

$$\begin{aligned}
P^{(2)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left(\theta_{\mu\alpha}\theta_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta}\theta_{\nu\alpha}\right) - \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}\,, \\
P^{(1)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left(\theta_{\mu\alpha}\omega_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta}\omega_{\nu\alpha} + \theta_{\nu\alpha}\omega_{\mu\beta} + \theta_{\nu\beta}\omega_{\mu\alpha}\right)\,, \\
P^{(S)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} &= \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}\,, \\
P^{(W)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} &= \omega_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}\,,
\end{aligned}$$

y están construidos a partir del proyector vectorial de espín uno $\theta_{\mu\nu}$ y el de espín cero $\omega_{\mu\nu}$, definidos como

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box} \quad ; \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}\,.$$

Los proyectores $P^{(s)}$, $s = 2, 1, S, W$, son simétricos bajo cada uno de los siguientes intercambios de índices:

$$\mu \leftrightarrow \nu \quad ; \quad \alpha \leftrightarrow \beta \quad ; \quad \mu\nu \leftrightarrow \alpha\beta \, .$$

Un poco de álgebra elemental sirve para comprobar que realmente son proyectores ortogonales (es decir, son idempotentes y ortogonales) y suman la identidad $\bar{\eta}_{\mu\nu}$ sobre el espacio de tensores simétricos de orden dos

$$\bar{\eta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}\right) = P^{(2)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} + P^{(1)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} + P^{(S)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} + P^{(W)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} \, .$$

Si trabajamos con representaciones de masa $m \neq 0$, es decir sobre campos $h_{\mu\nu}$ en los que $\Box h_{\mu\nu} = m^2 h_{\mu\nu}$, es posible caracterizar los subespacios invariantes bajo cada uno de los distintos proyectores, que etiquetaremos mediante $h^{(s,m)}_{\mu\nu}$ y vienen definidos a través de la ecuación

$$P^{(s)\ \alpha\beta}_{\mu\nu} h^{(s,m)}_{\alpha\beta} = h^{(s,m)}_{\mu\nu} \quad , \quad s = 2,\ 1,\ S,\ W \, .$$

Tomando transformada de Fourier espacial, es posible parametrizar estos subespacios en la forma que viene indicada en la siguiente tabla:

Subespacio de espín	Parametrización
2	$h_{00}^{(2,m)}(\vec{k},t) = -\frac{w^2}{m^2}\tau(\vec{k},t)$ $h_{0i}^{(2,m)}(\vec{k},t) = \frac{ik_i}{m^2}\dot{\tau}(\vec{k},t) + \frac{w^2}{w^2+m^2}\dot{\alpha}_i(\vec{k},t)$ $h_{ij}^{(2,m)}(\vec{k},t) = \frac{k_ik_j}{m^2w^2}\ddot{\tau}(\vec{k},t) + ik_i\alpha_j(\vec{k},t) + ik_j\alpha_i(\vec{k},t)+$ $+\frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{w^2}\right)\tau(\vec{k},t) + h_{ij}^{TT}(\vec{k},t)$
1	$h_{00}^{(1,m)}(\vec{k},t) = \frac{2w^2}{2w^2+m^2}\dot{\phi}(\vec{k},t)$ $h_{0i}^{(1,m)}(\vec{k},t) = ik_i\phi(\vec{k},t) + \dot{\alpha}_i(\vec{k},t)$ $h_{ij}^{(1,m)}(\vec{k},t) = \frac{2k_ik_j}{2w^2+m^2}\dot{\phi}(\vec{k},t) + ik_i\alpha_j(\vec{k},t) + ik_j\alpha_i(\vec{k},t)$
S	$h_{00}^{(S,m)}(\vec{k},t) = \frac{w^2}{2m^2}\tau(\vec{k},t)$ $h_{0i}^{(S,m)}(\vec{k},t) = -\frac{ik_i}{2m^2}\dot{\tau}(\vec{k},t)$ $h_{ij}^{(S,m)}(\vec{k},t) = -\frac{k_ik_j}{2m^2w^2}\ddot{\tau}(\vec{k},t) + \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{w^2}\right)\tau(\vec{k},t)$
W	$h_{00}^{(W,m)}(\vec{k},t) = -\ddot{\varphi}(\vec{k},t)$ $h_{0i}^{(W,m)}(\vec{k},t) = -ik_i\dot{\varphi}(\vec{k},t)$ $h_{ij}^{(W,m)}(\vec{k},t) = k_ik_j\varphi(\vec{k},t)$

donde, en todos los casos

$$
\begin{aligned}
h_{ij}^{TT}(\vec{k},t) &= h_{ij}^{TT}(\vec{k})e^{-iw_mt} + \bar{h}_{ij}^{TT}(-\vec{k})e^{iw_mt}\,,\\
\alpha_i(\vec{k},t) &= \alpha_i(\vec{k})e^{-iw_mt} + \bar{\alpha}_i(-\vec{k})e^{iw_mt}\,,\\
\tau(\vec{k},t) &= \tau(\vec{k})e^{-iw_mt} + \bar{\tau}(\vec{k})e^{iw_mt}\,,\\
\phi(\vec{k},t) &= \phi(\vec{k})e^{-iw_mt} + \bar{\phi}(-\vec{k})e^{iw_mt}\,,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\alpha_i(\vec{k},t) &= \alpha_i(\vec{k})e^{-iw_m t} + \bar{\alpha}_i(-\vec{k})e^{iw_m t}\,,\\ \varphi(\vec{k},t) &= \varphi(\vec{k})e^{-iw_m t} + \bar{\varphi}(\vec{k})e^{iw_m t} \quad ; \quad w_m := +\sqrt{\vec{k}^2+m^2}\,.\end{aligned}$$

Los proyectores de espín no son suficientes para generar todos los operadores diferenciales sobre el conjunto de tensores $h_{\mu\nu}$. Esto es así porque tenemos dos sectores de espín cero y es posible diseñar operadores que pasen de uno a otro. Necesitaremos por tanto hacer uso de los operadores de transferencia

$$\begin{aligned}P^{(SW)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} &= \theta_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}\,.\\ P^{(WS)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} &= \omega_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}\,.\end{aligned}$$

que pasan de W a S y de S a W respectivamente. A partir de los operadores de transferencia definiremos el operador

$$P^{\{SW\}} := P^{\{WS\}} := P^{(SW)} + P^{(WS)}\,,$$

que satisface la siguente tabla de productos (en la que se han omitido los índices)

$$\begin{aligned}P^{(SW)}P^{(WS)} &= 3P^{(S)}\\ P^{(WS)}P^{(SW)} &= 3P^{(W)}\\ P^{(S)}P^{(SW)} &= P^{(SW)}P^{(W)} = P^{(SW)}\\ P^{(W)}P^{(WS)} &= P^{(WS)}P^{(S)} = P^{(WS)}\\ P^{\{SW\}}P^{\{SW\}} &= 3(P^{(S)}+P^{(W)})\\ P^{(S)}P^{\{SW\}} &= P^{\{SW\}}P^{(W)} = P^{(SW)}\\ P^{(W)}P^{\{SW\}} &= P^{\{SW\}}P^{(S)} = P^{(WS)} \quad .\end{aligned}$$

El cálculo de propagadores necesitará de la inversión de ciertas combinaciones que involucran a todos los operadores anteriormente citados. En particular, es de gran ayuda la siguiente fórmula

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q} &= \lambda_2 P^{(2)} + \lambda_1 P^{(1)} + \lambda_S P^{(S)} + \lambda_W P^{(W)} + \lambda_{SW} P^{\{SW\}}\,, \\
\mathcal{Q}^{-1} &= \frac{1}{\lambda_2} P^{(2)} + \frac{1}{\lambda_1} P^{(1)} + \frac{\lambda_W}{\lambda_S\lambda_W - 3\lambda_{SW}^2} P^{(S)} + \frac{\lambda_S}{\lambda_S\lambda_W - 3\lambda_{SW}^2} P^{(W)} \\
&\quad - \frac{\lambda_{SW}}{\lambda_S\lambda_W - 3\lambda_{SW}^2} P^{\{SW\}} \quad .
\end{aligned}
$$

Otra fórmula útil es aquella que nos permite calcular productos simétricos en el subespacio $S \oplus W$. Genéricamente, los operadores sobre el subespacio $S \oplus W$ tienen la forma

$$
\Omega(\tau_S, \tau_W, \tau_{SW}) = \tau_S P^{(S)} + \tau_W P^{(W)} + \tau_{SW} P^{\{SW\}}
$$

y satisfacen la siguiente ley de producto

$$
\begin{aligned}
\Omega(\tau_S, \tau_W, \tau_{SW})\Omega(\lambda_S, \lambda_W, \lambda_{SW})\Omega(\tau_S, \tau_W, \tau_{SW}) &= \\
\Omega(\tau_S^2\lambda_S + 3\tau_{SW}^2\lambda_W + 6\tau_S\tau_{SW}\lambda_{SW} &\quad , \\
\tau_W^2\lambda_W + 3\tau_{SW}^2\lambda_S + 6\tau_W\tau_{SW}\lambda_{SW} &\quad , \\
\tau_S\tau_W\lambda_{SW} + \tau_S\tau_{SW}\lambda_S + \tau_{SW}\tau_W\lambda_W + 3\tau_{SW}^2\lambda_{SW}) &\,.
\end{aligned}
$$

Tanto los proyectores de espín como los operadores de transferencia contienen en su definición inversas del operador D'Alambertiano y son en consecuencia no locales. Pese a ello, existen dos combinaciones lineales, con coeficientes constantes, en las que la dependencia en el inverso de dicho operador se cancela. Una de ellas es el operador identidad $\bar{\eta}$ definido anteriormente. La otra es el operador $\bar{\bar{\eta}}$ definido como

$$
\bar{\bar{\eta}}_{\mu\nu,\alpha\beta} := \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} = 3P^{(S)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} + P^{(W)}_{\mu\nu\,\alpha\beta} + P^{\{SW\}}_{\mu\nu\,\alpha\beta}\,.
$$

Para los operadores locales de segundo-orden diferencial una base útil viene dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1\Box &= \left(\frac{1}{2}P^{(2)} - P^{(S)}\right)\Box\,. \\
\mathcal{C}_2\Box &= \left(\frac{1}{2}P^{(1)} + 3P^{(S)}\right)\Box\,. \\
\mathcal{C}_3\Box &= \left(P^{\{SW\}} + 6P^{(S)}\right)\Box \\
\mathcal{C}_4\Box &= \left(P^{(W)} - 3P^{(S)}\right)\Box\,.
\end{aligned}$$

De este modo, cualquier operador diferencial local de segundo orden que actúe sobre $h_{\mu\nu}$ puede escribirse en la forma

$$\Omega^{LD} = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \mathcal{C}_i \Box + a_1 \bar{\eta} + a_2 \bar{\bar{\eta}}\,.$$

La teoría lineal de Einstein (Fierz-Pauli) utiliza el operador $\mathcal{C}_1$. La teoría de espín dos masivo posee el mismo término cinético que la de Einstein y un término de masas construído a través de $\bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}}$. Al realizar el cambio de base a través de la transformación $Q(\lambda)$ en la sección 4.3, este término cinético se transforma en

$$Q(\lambda)\mathcal{C}_1\Box Q(\lambda) = \left(\frac{1}{2}P^{(2)} - \frac{4}{27}\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}P^{(W)}\right)\Box\,.$$

Para $\lambda = -2$ se vuelve local otra vez, es decir $\left(\frac{1}{2}P^{(2)} - \frac{1}{3}P^{(W)}\right)\Box = \mathcal{C}_1\Box - \frac{1}{3}\mathcal{C}_3\Box$, el cual describe gravitación linealizada del mismo modo que lo hacía $\mathcal{C}_1\Box$.

Apéndice B. Términos de masa para $h_{\mu\nu}$

Los procesos de reducción de orden diferencial en teorías alto-derivativas conducen a una suma de teorías bajo-derivativas que, genéricamente, necesitan de una diagonalización para hacer explícitos los grados de libertad que propagan. Este es el caso de las teorías escritas en términos de $h_{\mu\nu}$ en las que, como subproductos del proceso de reducción de orden diferencial, es normal obtener Lagrangianas cuyos términos cinéticos tipo Fierz-Pauli van acompañados de términos de masa construidos a partir de $\bar{\eta}$ y $\bar{\bar{\eta}}$ (apéndice A).

Aunque la clasificación de los términos de masa para la Lagrangiana de Einstein fue realizada en los años 70 por H. van Dam y M. Veltman [58], es interesante mirar el problema desde nuevos puntos de vista. En particular, trataremos la clasificación de términos de masa haciendo uso del formalismo de espacio de fases covariante y posteriormente contrastaremos los resultados con los razonamientos que surgen al utilizar proyectores de espín.

Con este punto de vista, la existencia de un único término de masas consistente, proporcional a $h^{\mu\nu}(\bar{\eta}_{\mu\nu\,\alpha\beta} - \bar{\bar{\eta}}_{\mu\nu\,\alpha\beta})h^{\alpha\beta}$, radica en que el resto de términos posibles o bien reducen la simetría del término cinético sin producir consecuencias apreciables (ni sobre el espacio de soluciones ni sobre la forma simpléctica allí definida), o bien esconden ecuaciones de cuarto orden diferencial con la correspondiente propagación de fantasmas de Weyl (estados de norma negativa).

La Lagrangiana masiva más general para $h_{\mu\nu}$, cuyo término cinético es el de Einstein, tiene la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Masiva} &= \frac{a}{2}h_{,\mu}h^{,\mu} - \frac{a}{2}h^{\mu\nu,\alpha}h_{\mu\nu,\alpha} + ah^{\mu\nu}{}_{,\nu}h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} - ah^{\mu\nu}{}_{,\nu}h_{,\mu} + \\ &+ \frac{c_1}{2}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + \frac{c_2}{2}h^2 .\end{aligned}$$

donde $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ y c_1, c_2 son constantes (que supondremos no simultáneamente nulas) con dimensiones de masa a la cuarta. Las ecuaciones de campo que se derivan de $\mathcal{L}_{Masiva}$ son

$$(a\Box + c_1)h_{\mu\nu} - ah_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} - ah_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\mu} + ah_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\left[ah_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + (c_2 - a\Box)h\right] = 0 .$$

Además, $\mathcal{L}_{Masiva}$ equipa al espacio de tensores $h_{\mu\nu}$ con una forma (pre)simpléctica que en la parametrización (3.5), introducida en el tercer capítulo, se escribe

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k}\left\{2aw^2 \mathbb{d}\dot{h}^{TT}_{ij}(\vec{k},t) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}h^{TT}_{ij}(-\vec{k},t) + \mathbb{d}\left[\dot{\alpha}_i - \beta_i\right](\vec{k},t) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\alpha_i(-\vec{k},t) - \right. \\ &\quad - \frac{a}{2}\mathbb{d}\dot{\tau}(\vec{k},t) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\tau(-\vec{k},t) - aw^2 \mathbb{d}\dot{\varphi}(\vec{k},t) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\tau(-\vec{k},t) - \\ &\quad \left. - aw^2 \mathbb{d}\dot{\tau}(\vec{k},t) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\varphi(-\vec{k},t) + 2aw^2 \mathbb{d}\tau(\vec{k},t) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\phi(-\vec{k},t)\right\} .\end{aligned}$$

Los grados de libertad propagados por $\mathcal{L}_{Masiva}$ y su clasificación física se obtienen al evaluar Ω sobre las soluciones de las ecuaciones de campo. En función de las componentes de Fourier, estas ecuaciones son las siguientes:

- **Componente** 00**.** Es siempre una ligadura algebraica

$$(c_1 + c_2)h_{00} = c_2 w^2 \varphi + (aw^2 + c_2)\tau .$$

- **Componentes** $0i$**.** Impone dos ecuaciones: una en la dirección de $\vec{k}$ y otra transversa

$$\beta_i = \frac{w^2}{w^2 - c_1/a}\dot{\alpha}_i \quad ; \quad c_1\phi = -a\dot{\tau} .$$

- **Componentes ij.** Se descomponen en cuatro ecuaciones.

  Para la parte transversa y sin traza

$$\ddot{h}_{ij}^{TT} + (w^2 - c_1/a)h_{ij}^{TT} = 0\,.$$

  Para la componente transversa de traza

$$a\ddot{\tau} + (aw^2 + c_1 + 2c_2)\tau + 2aw^2\ddot{\varphi} + \qquad (B.1)$$
$$+ 2c_2w^2\varphi + 4aw^2\dot{\phi} - 2(aw^2 + c_2)h_{00} = 0\,.$$

  Para la componete con un índice transverso y otro paralelo a $\vec{k}$

$$c_1\left[\ddot{\alpha}_i + (w^2 - c_1/a)\alpha_i\right] = 0\,.$$

  Por último, cuando ambos índices apuntan en la dirección de $\vec{k}$

$$(c_1 + c_2)w^2\varphi + a\ddot{\tau} + c_2\tau - c_2h_{00} = 0\,.$$

La solución general de las ecuaciones de campo depende de la elección de los parámetros c_1 y c_2. Si $c_1 = c_2 = 0$ tenemos gravitación linealinealizada ordinaria, tratada en el capítulo 3. Suponiendo c_1 y c_2 no nulos simultáneamente debemos distinguir los siguientes casos:

Cuando $c_1 = 0$.

En este caso, la solución general de las ecuaciones de campo viene dada a través de

$$\begin{aligned}
h_{00}(\vec{k},t) &= 2\dot{\phi}(\vec{k},t) + \ddot{\varphi}(\vec{k},t)\,,\\
h_{0i}(\vec{k},t) &= ik_i\phi(\vec{k},t) + \dot{\alpha}(\vec{k},t)\,,\\
h_{ij}(\vec{k},t) &= k_ik_j\varphi(\vec{k},t) + ik_i\alpha_j(\vec{k},t) + ik_j\alpha_i(\vec{k},t) +\\
&\quad + h_{ij}^{TT}(\vec{k})e^{-iwt} + \bar{h}_{ij}^{TT}(-\vec{k})e^{iwt}\,,
\end{aligned}$$

donde las funciones α_i, ϕ y φ son cualesquiera que cumplan

$$\ddot{\varphi} - w^2\phi + 2\dot{\phi} = 0\,.$$

Si construimos un cuadrivector con los campos α_i, ϕ y φ, al igual que hicimos en la sección 3.3, la interpretación es clara. En este caso el "término de masa" es proporcional a $(h^\mu{}_\mu)^2$, por lo que únicamente se ha reducido la simetría del término cinético de ser $\delta_\Lambda h_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu}$ a ser $\delta_\Lambda h_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu}$ con $\Lambda^\mu{}_{,\mu} = 0$.

La forma simpléctica sobre el espacio de soluciones y la energía son las mismas que para gravitación lineal

$$\Omega^{(2,0)} = \int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k}\, 2aiw \mathbb{d}\bar{h}_{ij}^{TT}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d} h_{ij}^{TT}(\vec{k}) \quad ; \quad H^{(2,0)} = \int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k}\, 2aw^2 \bar{h}_{ij}^{TT}(\vec{k}) h_{ij}^{TT}(\vec{k})\,.$$

Cuando $c_1 + c_2 = 0$.

En este caso las ecuaciones de campo se corresponden con el subespacio de espín dos (apéndice A)

$$h_{\mu\nu}(\vec{k}, t) = h_{\mu\nu}^{(2,m_2)}(\vec{k}, t)\,,$$

donde $m_2^2 = c/a$, con $c := c_2 = -c_1$. La restricción de la forma simpléctica y el hamiltoniano son por tanto

$$\begin{aligned} \Omega^{(2,m_2)} &= \int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k} \Big[2aiw_2 \mathbb{d}\bar{h}_{ij}^{TT}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d} h_{ij}^{TT}(\vec{k}) + \frac{4aiw^2m_2^2}{w_2} \mathbb{d}\bar{\alpha}_i(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\alpha_i(\vec{k}) + \\ &+ \; 3aiw_2 \mathbb{d}\bar{\tau}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\tau(\vec{k}) \Big]\,, \\ H^{(2,m_2)} &= \int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{k} \Big[2aw_2^2 \bar{h}_{ij}^{TT}(\vec{k}) h_{ij}^{TT}(\vec{k}) + 4aw^2m_2^2 \bar{\alpha}_i(\vec{k})\alpha_i(\vec{k}) + 3aw_2^2 \bar{\tau}(\vec{k})\tau(\vec{k}) \Big]\,, \end{aligned}$$

de manera que todos los modos contribuyen con energía positiva. El resultado puede reobtenerse sin más que observar el propagador

$$\Delta = \frac{1}{a\Box - c} P^{(2)} - \frac{1}{c} P^{(1)} - \frac{2a\Box - 2c}{3c} P^{(W)} - \frac{1}{3} P^{\{SW\}}\,,$$

en el que queda claro que la única propagación tiene lugar en el sector de espín 2.

Cuando $c_1 + c_2 \neq 0$ y $c_1 + 2c_2 \neq 0$.

Es esta situación es posible despejar ϕ, h_{00} y φ en función de τ en la forma

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{a}{c_1}\dot{\tau}\,, \\ h_{00} &= \frac{c_2 w^2}{c_1+c_2}\varphi + \frac{aw^2+c_2}{c_1+c_2}\tau\,, \\ \varphi &= -\frac{a(c_1+c_2)}{c_1 w^2(c_1+2c_2)}\ddot{\tau} + \frac{c_2(aw^2-c_1)}{c_1 w^2(c_1+2c_2)}\tau\,, \end{aligned} \tag{B.2}$$

de manera que la ecuación de traza $(B.1)$ se convierte en una ecuación de cuarto orden para τ:

$$(\partial_0^2 + w^2 + m_0^2)(\partial_0^2 + w^2 + m_2^2)\tau = 0\,,$$

donde

$$m_0^2 = \frac{c_1^2 + 4c_1c_2}{2a(c_1+c_2)} \quad ; \quad m_2^2 = -\frac{c_1}{a}\,.$$

Esto hace que el espacio de soluciones de las ecuaciones de campo sea de la forma

$$\begin{aligned} h_{00} &= -\frac{w^2}{m_2^2}\tau_2 - \frac{2w^2+2m_0^2+m_2^2}{2m_2^2}\tau_0\,, \\ h_{0i} &= \frac{ik_i}{m_2^2}\left[\dot{\tau}_2 + \dot{\tau}_0\right] + \frac{w^2}{w^2+m^2}\alpha_i\,, \\ h_{ij} &= k_ik_j\left[-\frac{w^2+m^2}{w^2m_2^2}\tau_2 + \frac{m_2^2-2w^2}{2w^2m_2^2}\tau_0\right] + ik_i\alpha_j + ik_j\alpha_i\,, \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{w^2}\right)\left[\tau_2+\tau_0\right] + h_{ij}^{TT}\,, \end{aligned}$$

con τ_α solución de la ecuación $(\partial_0^2 + w_\alpha^2)\tau_\alpha = 0$, $\alpha = 0, 2$. Nótese que los puntos del espacio de fases covariante son del tipo (apéndice A)

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(2,m_2)} + h_{\mu\nu}^{(S,m_0)} + h_{\mu\nu}^{(W,m_0)}$$

donde los campos φ y τ_0 que parametriza (W, m_0) y (S, m_0) satisfacen

$$\varphi = -\frac{2m_0^2 + m_2^2}{2m_0^2 m_2^2}\tau_0 \,.$$

Es decir, el escalar τ_0 no es ni de tipo S ni de tipo W. Este hecho era de esperar ya que el propagador en este caso es

$$\begin{aligned}
\Delta \;&=\; \frac{1}{a\Box + c_1}P^{(2)} + \frac{1}{c_1}P^{(1)} - \frac{c_1 + c_2}{2a(c_1+c_2)\Box - c_1^2 - 4c_1c_2}P^{(S)} + \\
&+\; \frac{2a\Box - c_1 - 3c_2}{2a(c_1+c_2)\Box - c_1^2 - 4c_1c_2}P^{(W)} + \frac{c_2}{2a(c_1+c_2)\Box - c_1^2 - 4c_1c_2}P^{\{SW\}} \,,
\end{aligned}$$

en donde se intuye la propagación tanto en S como en W. Aun así, la forma simpléctica y el Hamiltoniano son respectivamente

$$\Omega_{\mathcal{S}} = \Omega^{(2,m_2)} - \Omega^{(0,m_0)} \quad ; \quad H_{\mathcal{S}} = H^{(2,m_2)} - H^{(0,m_0)} \,, \tag{$B.3$}$$

donde $\Omega^{(s,m)}$ y $H^{(s,m)}$ han sido introducidas en el la sección 3.3 del capítulo 3.

Cuando $c_1 = -2c_2 =: -2c$.

Aquí no es posible despejar todos los campos en términos de τ, como se hizo en $(B.2)$, por lo que las soluciones se parametrizan según

$$\begin{aligned}
h_{00}(\vec{k},t) &= -w^2\varphi(\vec{k},t) - \frac{2w^2 + m^2}{m^2}\tau(\vec{k},t)\,. \\
h_{0i}(\vec{k},t) &= \frac{ik_i}{m^2}\dot{\tau}(\vec{k},t) + \frac{w^2}{w^2+m^2}\dot{\alpha}_i(\vec{k},t) \\
h_{ij}(\vec{k},t) &= k_ik_j\varphi(\vec{k},t) + ik_i\alpha_j(\vec{k},t) + ik_j\alpha_i(\vec{k},t) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{w^2}\right)\tau(\vec{k},t) + h_{ij}^{TT}(\vec{k},t)
\end{aligned} \tag{$B.4$}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tau(\vec{k},t) &= \tau(\vec{k})e^{-iw_mt} + \bar{\tau}(-\vec{k})e^{iw_mt} \\
\varphi(\vec{k},t) &= \varphi(\vec{k})e^{-iw_mt} + \bar{\varphi}(-\vec{k})e^{iw_mt} \quad ; \quad m := \frac{2c}{a}\,.
\end{aligned}$$

Al particularizar Ω sobre $(B.4)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k}\left\{2aiw_m \mathbb{d}\bar{h}_{ij}^{TT}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}h_{ij}^{TT}(\vec{k}) + \frac{4aiw^2m^2}{w_m}\mathbb{d}\bar{\alpha}_i(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\alpha_i(\vec{k}) + \right.\\ &- \left.\frac{aiw_m(4w^2+m^2)}{m^2}\mathbb{d}\bar{\tau}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\tau(\vec{k}) - 2aiw^2w_m\left[\mathbb{d}\bar{\tau}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\varphi(\vec{k}) + \mathbb{d}\bar{\varphi}(\vec{k}) \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\tau(\vec{k})\right]\right\}.\end{aligned}$$

Es evidente que $\tau(\vec{k})$ y $\varphi(\vec{k})$ no aparecen de manera canónica en la forma simpléctica, pero bajo la redefinición

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_2 + \tau_0\\ \varphi &= -\frac{w^2+m^2}{w^2m^2}\tau_2 + \frac{m^2-2w^2}{2w^2m^2}\tau_0\end{aligned}$$

volvemos a obtener la forma simpléctica $(B.3)$. Por tanto, este caso no tiene de particular más que la igualdad de masas. Al igual que nos pasó en la sección 3.3, las igualdades entre las masas de sectores distintos de espín hacen que los cálculos de los espacios de soluciones presenten peculiaridades frente a los casos en los que las masas son distintas. Sin embargo, los razonamientos basados en el cálculo del propagador no distinguen entre estas situaciones.

Apéndice C

Sobre la localidad de la teoría bajo-derivativa

Los términos cinéticos para $\tilde{h}$ y $\tilde{\pi}$ en (4.14) contienen el operador $N\Box$ que es local para una elección arbitraria de los parámetros de gauge. De hecho se tiene, en la notación del apéndice A, que

$$N = a\mathcal{C}_1 - \xi_3\mathcal{C}_2 - \lambda(\lambda-1)\xi_3\mathcal{C}_3 - \xi_3(\lambda-1)^2\mathcal{C}_4\,.$$

Sin embargo, el "término de masa" $-\frac{1}{2}\tilde{\pi}NM^{-1}N\tilde{\pi}$ es solamente local para la elección de parámetros que obedecen las condiciones

$$\xi_1 = -c\frac{\xi_3^2}{a^2} \quad ; \quad \frac{a^2}{2c}\frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_3^2} = -\frac{3b+c}{4b+c} \quad ; \quad \lambda = \frac{b}{4b+c}\,, \qquad (C.1)$$

que se obtienen al pedir que $NM^{-1}N$ sea combinación lineal de $\bar{\eta}$ y $\bar{\bar{\eta}}$. Esto nos deja uno de los parámetros ξ aún arbitrario. Esta misma elección hace que la Lagrangiana fermiónica (4.24) sea también local.

A la vista de las anteriores condiciones, una teoría en la que $4b+c=0$ no tiene un equivalente bajo-derivativo local. Sin embargo este caso es crítico en la teoría invariante bajo difeomorfismos ya que ésta no es regular en $R_{\mu\nu}$ y la transformación de Legendre covariante (ver los comentarios de la sección 3.5 o bien la ecuación (8) en [13]) no puede realizarse en esas variables. Cuando se introducen términos de fijación de gauge y se considera la teoría de campos linealizada, la transformación de Legendre covariante-Lorentz que hemos propuesto en (4.9) puede llevarse a cabo siempre (la ecuación (4.9) es siempre no-singular, aun para $4b+c=0$). Sin embargo el reflejo de la no regularidad en $R_{\mu\nu}$ se traduce en la no-localidad de la teoría bajo-derivativa.

Cuando se considera la teoría transformada a través de Q, el operador potencialmente no local es

$$\begin{aligned}\hat{N}\hat{M}^{-1}\hat{N} &= \frac{a^2}{2c}P^{(2)} + \frac{4}{27}\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}\frac{a^2}{2(3b+c)}P^{(W)} \\ &- \frac{\xi_3^2}{2\xi_1}P^{(1)} - \frac{4}{27}\frac{(\lambda-1)^4}{\lambda^2}\frac{\xi_3^2}{\xi_1-\xi_2}P^{(S)}\,.\end{aligned}$$

Como explicamos anteriormente, debe tomarse $\lambda=-2$ a fin de mantener la localidad del término de fuente. En ese caso $\hat{N}\Box$ sigue siendo local. La condición de localidad para $\hat{N}\hat{M}^{-1}\hat{N}$ nos lleva a

$$\xi_1 = -\frac{1}{5}\xi_2 \quad ; \quad \xi_3^2 = \frac{a^2}{5c}\xi_2 \quad ; \quad c = -\frac{9}{2}b\,. \tag{C.2}$$

Estas condiciones son las mismas que encontramos antes, pero ahora $(C.1)$ genera una condición, la última de las ecuaciones $(C.2)$, sobre los parámetros de la teoría invariante de gauge original.

Transformación de Legendre para los fermiones de Faddeev-Popov

Desarrollaremos brevemente la reducción de orden diferencial de la Lagrangiana alto-derivativa de Faddeev-Popov para campos anticonmutantes

$$\mathcal{L}_{FP}^{HD} = \bar{C}_\mu\,\left(\Box(a_1\Box+b_1)\,\theta^{\mu\nu} + \Box(a_2\Box+b_2)\,\omega^{\mu\nu}\right)\,C_\nu + \bar{\zeta}^\mu C_\mu + \bar{C}_\mu\zeta^\mu\,,$$

donde ζ y $\bar{\zeta}$ son corrientes externas, también anticonmutantes. Eliminando derivadas totales espaciotemporales, los momentos conjugados pueden ser definidos como las derivadas por la izquierda

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\mu} &= \frac{\partial^{L}\mathcal{L}_{HD}}{\partial\,\Box\,\bar{C}_{\mu}} = \mathcal{M}^{\mu\nu}\Box\,C_{\nu} + \frac{1}{2}\mathcal{N}^{\mu\nu}C_{\nu}\,, \\
\bar{\mathcal{P}}^{\mu} &= \frac{\partial^{L}\mathcal{L}_{HD}}{\partial\,\Box\,C_{\mu}} = -\mathcal{M}^{\mu\nu}\Box\,\bar{C}_{\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{N}^{\mu\nu}\bar{C}_{\nu}\,,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\mathcal{M} := a_1\theta + a_2\omega \quad ; \quad \mathcal{N} := b_1\theta + b_2\omega\,,
$$

que implica

$$
\begin{aligned}
\Box\,C_{\mu} &= \mathcal{M}^{-1}_{\mu\nu}\left[\mathcal{P}^{\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{N}^{\nu\rho}C_{\rho}\right] \\
\Box\,\bar{C}_{\mu} &= -\mathcal{M}^{-1}_{\mu\nu}\left[\bar{\mathcal{P}}^{\nu} + \frac{1}{2}\mathcal{N}^{\nu\rho}\bar{C}_{\rho}\right]
\end{aligned}
$$

Por tanto el "Hamiltoniano" es

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &:= (\Box\bar{C})\mathcal{P} + (\Box C)\bar{\mathcal{P}} - \mathcal{L} \\
&= -\left(\bar{\mathcal{P}} + \frac{1}{2}\mathcal{N}\bar{C}\right)\mathcal{M}^{-1}\left(\mathcal{P} - \frac{1}{2}\mathcal{N}C\right) - \bar{\zeta}^{\mu}C_{\mu} - \bar{C}_{\mu}\zeta^{\mu}\,.
\end{aligned}
$$

Con la redefinición de los campos

$$
\begin{aligned}
&C = E + F &&;\quad \bar{C} = \bar{E} + \bar{F} \\
&\mathcal{P} = \tfrac{1}{2}\mathcal{N}\,(E - F) &&;\quad \bar{\mathcal{P}} = \tfrac{1}{2}\mathcal{N}\left(\bar{F} - \bar{E}\right)
\end{aligned}
$$

la Lagrangiana de Helmholtz

$$
\mathcal{L}_H := (\Box\,C)\bar{\mathcal{P}} + (\Box\,\bar{C})\mathcal{P} - \mathcal{H}
$$

se convierte en

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{LD} &= \bar{E}\mathcal{N}\Box\,E - \bar{F}\left(\mathcal{N}\Box + \mathcal{N}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}\right)F \\
&\quad + \bar{\zeta}(E + F) + (\bar{E} + \bar{F})\zeta\,.
\end{aligned}
$$

Referencias

[1] F. Bopp, *Ann. Physik* **38** (1940) 345.

[2] B. Podolsky, *Phys. Rev.* **62** (1942) 68.

B. Podolsky y C. Kikuchi, *Phys. Rev.* **65** (1944) 228.

B. Podolsky y P. Schwed, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948) 40.

[3] K. S. Stelle, *Gen. Rel. Grav.* **9** (1978) 353.

[4] A. Bartoli y J. Julve, *Nucl. Phys.* **B425** (1994) 277.

[5] K. Jansen, J. Kuti y Ch. Liu, *Phys. Lett.* **B309** (1993) 119; *Phys. Lett.* **B309** (1993) 127.

[6] A. Pais y G. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **79** (1950) 145.

Y. Katayama, *Prog. Theor. Phys.* **9** (1953) 31.

[7] X. Jaén, J. Llosada y A. Molina, *Phys. Rev.* **D34** (1986) 2302.

[8] A. Dobado y A. L. Maroto, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 104045.

A. Dobado y A. L. Maroto, *Non-local gravitational effective action and particle production.* Contribution to the Proceedings of the International Seminar on Mathematical Cosmology, Potsdam (Germany), March 30 - April 4, 1998. `gr-qc/9805092`.

[9] D. G. Barci, C. G. Bollini y M. C. Roca, *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 1737.

[10] B. M. Pimentel y R. G. Teixeira, *Nuovo Cimento* **B113** (1998) 805.

[11] L. Querella, *Variational Principles and Cosmological Models in Higher-Order Gravity.* (IAGL, Universite de Liege) (1999). `gr-qc/9902044`.

[12] D. J. Gross y E. Witten, *Nucl. Phys.* **B277** (1986) 1.

R. R. Metsaev y A. A. Tseytlin, *Phys. Lett.* **B185** (1987) 52 .

M. C. Bento y O. Bertolami, *Phys. Lett.* **B228** (1989) 348.

[13] N. D. Birrell y P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Univ. Press (1982).

[14] K. S. Stelle, *Phys. Rev.* **D16** (1977) 953.

[15] J. Julve y M. Tonin, *Nuovo Cim.* **B46** (1978) 137.

[16] E. S. Fradkin y A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys.* **B201** (1982) 469.

[17] N. H. Barth y S. M. Christensen, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 1876.

[18] I. B. Avramidy y A. O. Barvinsky, *Phys. Lett.* **159** (1985) 269.

[19] I. Antoniadis y E. T. Tomboulis, *Phys. Rev.* **D33** (1986) 2756.

[20] T. Goldman, J. Pérez-Mercader, F. Cooper y M. M. Nieto, *Phys. Lett.* **281** (1992) 219.

E. Elizalde, S. D. Odintsov y A. Romeo, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 1680.

[21] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov y I. L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, (IOP, Bristol and Philadelphia, 1992).

[22] S. Deser y D. G. Boulware, *Phys. Rev.* **D6** (1972) 3368.

B. Whitt, *Phys. Lett.* **B145** (1984) 176.

J. D. Barrow y S. Cotsakis, *Phys. Lett.* **B214** (1988) 515.

G. Gibbons, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 123 .

[23] M. Ferraris y J. Kijowski, *Gen. Rel. Grav.* **14** (1982) 165.

A. Jakubiec y J. Kijowski, *Phys. Rev.* **D37** (1988) 1406.

G. Magnano, M. Ferraris y M. Francaviglia, *Gen. Rel. Grav.* **19** (1987) 465; *J. Math. Phys.* **31** (1990) 378; *Class. Quantum. Grav.* **7** (1990) 557.

[24] J. C. Alonso, F. Barbero, J. Julve y A. Tiemblo, *Class. Quantum Grav.* **11** (1994) 865.

[25] A. Hindawi, B. A. Ovrut y D. Waldram, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 5583.

[26] J. C. Alonso y J. Julve, (1993), *Particle contents of higher order gravity. Class. Quantum Grav.* (Proc. 1st Iberian Meeting on Gravity, Evora, Portugal 1992) (Singapore: World Scientific) 301.

[27] E. T. Wittaker, (1904), *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (Cambridge: Cambridge University Press). Los trabajos pioneros de M. Ostrogradski y W. F. Donkin vienen citados aquí.

[28] D. J. Saunders y M. Crampin, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** (1990) 3169.

[29] M. J. Gotay, *Mechanics, Analysis y Geometry: 200 Years after Legendre*, ed. M. Francaviglia (Amsterdam: Elsevier) (1991).

[30] M. de León y P. R. Rodrigues, *Generalized Classical Mechanics and Field Theory.* North-Holland Mathematics Studies **112**. (1991).

[31] V. Aldaya y J. de Azcárraga, *J. Math. Phys.* **19(7)** (1978) 1876; *J. Math. Phys.* **19(9)** (1978) 1869; *Riv. Nuovo Cimento* **3** (1980) 1; *J. Phys. A Math.* **13** (1982) 2545.

[32] F. J. de Urríes y J. Julve, *Degrees of Freedom of Arbitrarily Higher-Derivative Field Theories.* `gr-qc/9506009`.

[33] F. J. de Urríes y J. Julve, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998) 6949.

[34] F. J. de Urríes y J. Julve, *Higher-derivative scalar field theories as constrained second-order theories.* `hep-th/9812020`.

[35] F. J. de Urríes, J. Julve y E. J. Sánchez, *Higher-derivative boson field theories as constrained second-order theories.* Enviado a *J. Phys. A: Math. Gen.*

[36] E. Witten y Č. Crnković, *Covariant description of canonical formalism in geometrical theories*, en *Three Hundred Years of Gravitation* S. W. Hawking and W. Israel Eds. Cambridge University Press (1989) 676-684.
Č. Crnković, *Nucl. Phys.* **B288** (1987) 419.
Č. Crnković, *Class. Quantum Grav.* **5** (1988) 1557.

[37] G. J. Zuckerman, *Action Principles and Global Symmetries.* San Diego. 1986. Proceedings. *Mathematical Aspects of String Theory.* 259-284.

[38] V. Aldaya, J. Navarro-Salas y M. Navarro, *Phys. Lett.* **B287** (1992) 109.

[39] A. Bartoli, J. Julve y E. J. Sánchez, *Class.Quantum Grav.* **16** (1999) 2283.

[40] J. Fernando Barbero G. y Eduardo J. S. Villaseñor, *Phys. Rev.* **D61** (2000) 104014.
J. Fernando Barbero G. y Eduardo J. S. Villaseñor, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 084021.
J. Fernando Barbero G. y Eduardo J. S. Villaseñor, *Nucl. Phys.* **B600/2** (2001) 423.

[41] M. Kaku, *Nucl. Phys.* **B203** (1982) 285; *Phys. Rev.* **D27** (1983) 2819.

[42] R. J. Rivers, *Il Nuovo Cimento* **34** (1964) 387.
K.J.Barnes, Tesis Doctoral, no publicada.

[43] M. Ostrogradski, *Mem. Acad. de St. Pet. VI* **4** (1850) 385.

[44] H. Goldstein, *Classical Mechanics.* Addison-Wesley, Reading, Mass.

[45] M. Henneaux y C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems.* (1992). Princeton, USA: Univ. Pr.

[46] H-J. Schmidt, *Class. Quantum Grav.* **7** (1990) 1023.
H. Kleinert y H-J. Schmidt, *Cosmology with Curvature-Saturated Gravitational Lagrangian* $R/\sqrt{1+l^4R^2}$. `gr-qc/0006074`.

[47] C. A. P. Galvão y B. M. Pimentel, *Can. J. Phys.* **66** (1988) 460.

[48] C. A. P. Galvão, *A generalizad Yang-Mills theory I: general aspects of the classical theory.* Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Preprint NF-040/87, Rio de Janeiro,

Brazil, 1987.

[49] Y. Saito, R. Sugano, T. Ohta y T. Kimura, *J. Math. Phys.* **30(5)** (1989) 1122.

[50] M. Baker, J. S. Ball y F. Zachariasen, *Nucl. Phys.* **B229** (1983) 445.

M. Baker, L. Carson, J. S. Ball y F. Zachariasen, *Nucl. Phys.* **B229** (1983) 456.

[51] T. Nakamura y S. Hamamoto, *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996) 469.

[52] M. Henneaux, *Consistent interactions between gauge fields: the cohomological approach. Conference on Secondary Calculus and Cohomological Physics.* Moscow. Russia.

G. Barnich y M. Henneaux, *Phys. Lett.* **B311** (1993) 123.

[53] R. Abraham y J. E. Marsden, *Fuondations of Mechanics.* Second Edition (1978) Addison-Wesley Publishing Company.

[54] M. Fierz y W. Pauli, *Proc. R. Soc.* **A173** (1939) 211.

[55] M. Henneaux, C. Teitelboim y J. Zanelli, *Nucl. Phys.* **B332** (1990) 169.

[56] P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B60** (1973) 478.

[57] S. Glottober, H-J. Schimidt y A. A. Starobinsky, *Class. Quantum Grav.* **7** (1990) 893.

A. B. Mayer y H-J. Schmidt, *Class. Quantum Grav.* **10** (1993) 2441 y las referencias allí contenidas.

[58] H. van Dam y M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B22** (1970) 397.